

A. Kelemen

1971

QUANTENELEKTRODYNAMIK STÄRKER FELDER

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Johann - Wolfgang - Goethe - Universität

zu

Frankfurt am Main



Vorgelegt von

Alan Kelemen

aus

P r a g

Frankfurt am Main, 1971



Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main.

Dekan:	Prof. Dr. H. Oelschläger
Leiter der Arbeit:	Prof. Dr. W. Greiner
Erstgutachter:	Prof. Dr. W. Greiner
Zweitgutachter:	Dr. W. Scheid

Tag der mündlichen Prüfung: 24. 9. 1971

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhaltsverzeichnis:

1. Einleitung	- 4 -
2. Das Variationsprinzip	- 5 -
3. Die Herleitung der Differentialgleichungen und ihre Eigenschaften	- 12 -
4. Die Erhaltungsgrößen	- 44 -
5. Die Renormierung	- 61 -

1. Einleitung

Bei der Entwicklung einer Quantenelektrodynamik für starke (äußere) Felder kann man sich nicht mehr auf die Störungsrechnung verlassen. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn man ein Elektron betrachtet, das sich im Feld eines superschweren Kerns bewegt. Hier erwartet man nämlich, daß das $1s$ - Elektronenniveau sich dem Vakuumzustand nähert, so daß der Einfluß des Vakuums nicht mehr als eine kleine Störung betrachtet werden kann. Es geht also darum, eine neue Methode zu finden, mit der alle Größen bestimmt werden können, die einen Feldzustand eindeutig charakterisieren. Solch ein Versuch wurde schon vorgenommen⁽¹⁾. Jedoch bleiben die Photonen unberücksichtigt (nackte Photonen), da man nur das Feld, das durch Elektronen hervorgerufen wird, in Betracht gezogen hat. Hier wollen wir unsere Überlegungen auch auf Photonen ausdehnen, was ein modifiziertes Verfahren notwendig macht. Unser Ziel ist es, ein solches System von Gleichungen aufzustellen, das in die Hartree - Fock Gleichungen übergeht, wenn man die Anwesenheit der Photonen vernachlässigt. Es wird sich herausstellen, daß man zu diesen Gleichungen mit Hilfe eines Variationsprinzips kommt. Um dieses Prinzip benutzen zu können, muß man noch die Frage des Ansatzes für die explizite Gestalt des Diracschen und elektromagnetischen Feldes entscheiden. Der Einfachheit halber gehen wir intuitiv vor. Man wird jedoch sehen, daß der Ansatz es uns ermöglichen wird, alle Größen zu finden, die in dieser Theorie erhalten bleiben, um dadurch physikalische Interpretierbarkeit zu gewährleisten.

2. Das Variationsprinzip

Seien $\psi(x)$, $A_\mu(x)$ und $\dot{A}_\mu(x) = \dot{P}_\mu(x)$ Feldgrößen, die folgenden Gleichungen genügen ($\hbar = c = 1$) ⁽²⁾

$$i g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - e g^{\mu\nu} A_\mu \psi - m \psi = 0 \quad (2.1)$$

$$\square A_\mu = j_\mu \quad (2.2)$$

Wobei

$$j_\mu = e : \psi^\dagger g_{0\mu} \psi : \quad (2.3)$$

Zur Gleichung (2.2) muß man noch die Bedingung hinzufügen, die ausdrückt, daß man Lorentz - Eichung benutzt. Wir wissen aber, daß bezüglich des elektromagnetischen Feldes nur Gleichung (2.2) allein dynamische Eigenschaften trägt und daß es deshalb genügt, Lorentz - Eichung zu einem Zeitpunkt t zu fordern, wenn man zu diesem Zeitpunkt t die obigen Gleichungen noch durch

$$\Delta A_0^t + \partial_i P_i^t + j_0^t = 0$$

ergänzt, Es ist nämlich

$$\dot{P}_\mu = j_\mu + \Delta A_\mu \quad (2.4)$$

$$\dot{A}_\mu = P_\mu \quad (2.4a)$$

und also

$$\begin{aligned} A_\mu^{t+\delta t} &= A_\mu^t + \delta t P_\mu^t \\ P_\mu^{t+\delta t} &= P_\mu^t + \delta t (j_\mu^t + \Delta A_\mu^t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Wir wollen nun wissen, welche Bedingungen zur Zeit t bekannt sein müssen, so daß Lorentz - Eichung $P_0^t + \partial_i A_i^t = 0$ auch zum Zeitpunkt $t + \delta t$ erhalten bleibt:

$$P_0^{t+\delta t} + \partial_i A_i^{t+\delta t} = 0$$

Nun

$$\begin{aligned} p_0^{t+\delta t} + \partial_i A_i^{t+\delta t} &= p_0^t + \delta t (\dot{p}_0^t + \Delta A_0^t) + \partial_i A_i^t + \delta t \partial_i p_i^t \\ &= \delta t (\dot{p}_0^t + \partial_i p_i^t + \Delta A_0^t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die rechte Seite von (2.6) muß also Null sein

$$\dot{p}_0^t + \partial_i p_i^t + \Delta A_0^t = 0 \quad (2.7)$$

Man überzeugt sich leicht, daß (2.7) auch zum Zeitpunkt $t + \delta t$ erhalten bleibt und zwar ohne jede zusätzliche Bedingung. Wenn also $p_0^t + \partial_i A_i^t = 0 = \dot{p}_0^t + \partial_i p_i^t + \Delta A_0^t$, dann gilt dasselbe zur Zeit $t + \delta t$ und Lorentz-Eichung bleibt zu jeder späteren Zeit erhalten. Die Bedingung der Lorentz-Eichung und Gleichung (2.7) tragen keine dynamischen Eigenschaften. Wir werden gleich sehen, daß das Variationsprinzip, das als Grundlage für die hier präsentierte Theorie dient, ein dynamisches Prinzip ist (es wird nach den Größen zur Zeit $t + \delta t$ variiert, jedoch nicht nach denjenigen zur Zeit t). Das führt uns zu der Schlußfolgerung, daß die Eichbedingung zunächst außer Acht gelassen werden kann und erst zum Schluß finden wir eine (andere) Bedingung, die dieselben Eigenschaften wie Lorentz-Eichung hat.

Kehren wir nun wieder zu den Gleichungen (2.1) und (2.2) zurück. Mit der vereinbarten Schreibweise haben wir

$$\begin{aligned} \psi^{t+\delta t} &= \psi^t - \delta t \sum_{i=1}^3 g^{0i} \frac{\partial \psi^t}{\partial x^i} \\ &\quad - \delta t e^i g^{0\mu} : A_\mu^t \psi^t - \delta t m i g^0 \psi^t \end{aligned} \quad (2.8)$$

und zusätzlich (2.5). Wählen wir eine näherungsweise geltende Darstellung unserer Operatoren ψ, A_μ, p_μ , die wir mit Ψ, A_μ, p_μ bezeichnen! Unter $\psi^{t+\delta t}, A_\mu^{t+\delta t}$ und $p_\mu^{t+\delta t}$ werden wir die Feldgrößen verstehen, die man aus (2.8) und (2.5) bekommt, wenn in diesen Gleichungen überall rechts statt ψ^t, A_μ^t, p_μ^t die Größen Ψ^t, A_μ^t, p_μ^t aufgeschrieben werden. Es ist durchaus plausibel, zu fordern, daß der "Unterschied" zwischen den Operatoren $\Psi^{t+\delta t}$ und $\psi^{t+\delta t}, A_\mu^{t+\delta t}$

und $A_\mu^{t+\delta t}$ und $P_\mu^{t+\delta t}$ und $P_\mu^{t+\delta t}$ minimal wird. Um das genau auszudrücken, führen wir einen vollständigen Satz von Zuständen $|I\rangle$ ein, mit dessen Hilfe wir den folgenden Ausdruck bilden

$$\sum_{I,J} \left\{ |\langle I | \Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t} | J \rangle|^2 + \sum_{\mu=0}^3 |\langle I | a_\mu^{t+\delta t} - A_\mu^{t+\delta t} | J \rangle|^2 + \sum_{\mu=0}^3 |\langle I | p_\mu^{t+\delta t} - P_\mu^{t+\delta t} | J \rangle|^2 \right\} \equiv \mathcal{M} \quad (2.9)$$

Nun postulieren wir, daß

$$\delta \mathcal{M} = 0 \quad (2.10)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\delta \Psi^t = \delta a_\mu^t = \delta P_\mu^t = 0 \quad (2.11)$$

Man variiert also nur nach $\Psi^{t+\delta t}$, $a_\mu^{t+\delta t}$ und $P_\mu^{t+\delta t}$. Als ein Beispiel zeigen wir, wie sich die Hartree - Fock Gleichungen aus (2.10) ergeben, wobei wir einige Ergebnisse aus dem Abschnitt 3 benutzen werden, um Wiederholungen zu vermeiden.

Wir fangen mit (3.11) an. Als Ansatz für Ψ benutzen wir

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^N b_\alpha \phi_\alpha \quad (*)$$

wobei b_α ein üblicher Vernichtungsoperator für ein Elektron im Zustand α ist. (2)

Der genaue ψ - Operator soll einer quantisierten Schrödingerschen Gleichung mit Selbstkoppelung genügen

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi + \frac{e^2}{4\pi} \int \frac{\psi^*(x') \psi(x')}{|x - x'|} d^3 x' \cdot \psi \quad (2.12)$$

Nun

$$\psi^{t+\delta t} = \Psi^t - i \delta t \left(\hat{H} \Psi^t + \frac{e^2}{4\pi} \int \frac{\Psi^{*t}(x') \Psi^t(x')}{|x - x'|} d^3 x' \Psi^t \right) \quad (2.13)$$

Nach (3.11) und (2.11), (2.13) bekommen wir

$$0 = \sum_I \langle I | \{ \Psi^{t+\delta t} - \Psi^t + i\delta t (\hat{H}\Psi^t + \frac{e^2}{4\pi} \int \frac{\Psi^*(x') \Psi^t(x')}{|x'-x|} d^3x' \Psi^t), \delta \Psi^{t+\delta t} \} | I \rangle \quad (2.14)$$

oder

$$0 = \sum_{\substack{\alpha, \bar{\alpha} \\ \alpha, \bar{\alpha} = 1}}^N \sum_I \langle I | \{ b_{\alpha}, b_{\bar{\alpha}}^+ \} | I \rangle \phi_{\alpha}^{t+\delta t} \delta \phi_{\bar{\alpha}}^{*t+\delta t} - \sum_{\substack{\alpha, \bar{\alpha} \\ \alpha, \bar{\alpha} = 1}}^N \sum_I \langle I | \{ b_{\alpha}, b_{\bar{\alpha}}^+ \} | I \rangle \phi_{\alpha}^t \delta \phi_{\bar{\alpha}}^{*t+\delta t} + i\delta t \sum_{\substack{\alpha, \bar{\alpha} \\ \alpha, \bar{\alpha} = 1}}^N \sum_I \langle I | \{ b_{\alpha}, b_{\bar{\alpha}}^+ \} | I \rangle \hat{H} \phi_{\alpha}^t \delta \phi_{\bar{\alpha}}^{*t+\delta t} + i\delta t \frac{e^2}{4\pi} \sum_{\substack{\alpha, \alpha', \alpha'', \bar{\alpha} \\ \alpha, \alpha', \alpha'', \bar{\alpha} = 1}}^N \langle I | \{ b_{\alpha'}, b_{\bar{\alpha}}^+, b_{\alpha}, b_{\bar{\alpha}}^+ \} | I \rangle \times \int \frac{\phi_{\alpha'}^{*t}(x') \phi_{\alpha''}^t(x')}{|x'-x|} d^3x' \phi_{\alpha}^t \delta \phi_{\bar{\alpha}}^{*t+\delta t} \quad (2.15)$$

Wegen $\{ b_{\alpha}, b_{\bar{\alpha}}^+ \} = \delta_{\alpha\bar{\alpha}}$ und (3.17) haben wir (ohne Photonen $\nu_i = 0$)

$$\sum_I \langle I | \{ b_{\alpha}, b_{\bar{\alpha}}^+ \} | I \rangle = 2^N K \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \quad (2.16)$$

wobei ein beliebiger Zustand $|I\rangle$ auf diese Weise

$$|I\rangle = |n_1, \dots, n_N, \dots, n_i, \dots\rangle \quad (2.16a)$$

definiert ist. Dabei sind die $n_1, \dots, n_N$ die Besetzungszahlen der Elektronen auf den Niveaus $(1, \dots, N)$; i liegt außerhalb der Menge $(1, \dots, N)$.

Dann ist

$$\sum_I 1 = \sum_{n_1, \dots, n_N} \sum_{n_i, \dots} \quad (2.16b)$$

Bezeichnen wir die zweite Summe mit K , erhalten wir sofort (2.16).

Analog wie im Abschnitt 3 stellen wir fest

$$\{ b_{\alpha'}^+, b_{\bar{\alpha}}^+, b_{\alpha}, b_{\bar{\alpha}}^+ \} = \delta_{\alpha'\alpha''} \delta_{\alpha\bar{\alpha}} - \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\bar{\alpha}\alpha''} + b_{\bar{\alpha}} b_{\alpha'}^+ \delta_{\bar{\alpha}\alpha''} - b_{\alpha''} b_{\alpha}^+ \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \quad (2.17)$$

und

$$\sum_I \langle I | \{ b_{\alpha'}^{\dagger} b_{\alpha''} b_{\alpha}, b_{\alpha}^{\dagger} \} | I \rangle$$

$$= 2^{N-1} K(\delta_{\alpha\alpha''} \delta_{\alpha\alpha'} - \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha\alpha''}) \quad (2.18)$$

Das eingesetzt in (2.15) ergibt, weil die Variationen $\delta \phi_{\alpha}^{*t+\delta t}$ voneinander unabhängig sind,

$$\phi_{\alpha}^{t+\delta t} - \phi_{\alpha}^t + i\delta t \hat{H} \phi_{\alpha}^t$$

$$+ i\delta t \frac{e^2}{8\pi} \sum_{\alpha'=1}^N \left\{ \frac{\phi_{\alpha'}^{*t}(x') \phi_{\alpha'}(x')}{|x'-x|} d^3x' \phi_{\alpha} \right.$$

$$\left. - i\delta t \frac{e^2}{8\pi} \sum_{\alpha'=1}^N \left\{ \frac{\phi_{\alpha'}^{*t}(x') \phi_{\alpha}^t(x')}{|x'-x|} d^3x' \phi_{\alpha'} \right\} = 0 \quad (2.19)$$

oder

$$i \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial t} = \hat{H} \phi_{\alpha} + \frac{e^2}{8\pi} \left[\sum_{\alpha'=1}^N \left\{ \frac{\phi_{\alpha'}^{*}(x') \phi_{\alpha}(x')}{|x'-x|} d^3x' \phi_{\alpha} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{\alpha'=1}^N \left\{ \frac{\phi_{\alpha}^{*}(x') \phi_{\alpha'}(x')}{|x'-x|} d^3x' \phi_{\alpha'} \right\} \right] \quad (2.20)$$

was gerade die nichtrelativistischen H. - F. Gleichungen sind,

Dieses Beispiel zeigt uns die Nützlichkeit des Variationsprinzips (2.10).

Was passiert nun, wenn wir zusätzlich den Ansatz

$$a_{\mu} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \pi_{\mu}^{\alpha} + \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{+} \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha}$$

$$p_{\mu} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \overset{D}{\pi}_{\mu}^{\alpha} + \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{+} \overset{D}{\tilde{\pi}}_{\mu}^{\alpha} \quad (2.21)$$

Für die elektromagnetischen Feldgrößen a_{μ} und p_{μ} wählen. Hierbei sind die π_{μ}^{α} Funktionen (und die $\tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha}$ ihre Zeitableitungen), die der freien Wellengleichung genügen, denn man stellt sofort fest, daß wir auf die Gleichungen für freie Photonen kommen. Betrachten wir wieder das ursprüngliche System von Differenzialgleichungen (2.1) und (2.2). Hier bringen jedoch die Ansätze (*) und (2.21) und das Variationsprinzip (2.10) nichts Neues. Man bekommt Gleichungen für freie Elektronen und

Photonen. Versuchen wir weitere Kombinationen: (*) und

$$\begin{aligned} a_\mu &= \sum_{\alpha, \beta} b_\alpha^+ b_\beta \Pi_\mu^{\alpha\beta} \\ \rho_\mu &= \sum_{\alpha, \beta} b_\alpha^+ b_\beta \overset{D}{\Pi}_\mu^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die noch unbekannten Funktionen Π beschreiben Elektron - Positron - Korrelationen (Amplituden). Die Gleichungen (2.1), (2.2), Ansätze (*) und (2.22) und das Variationsprinzip (2.10) führen uns, wie leicht einzusehen ist, auf ähnliche Gleichungen wie (2.20), die jedoch relativistisch sind. Wir haben dort keine Photonen berücksichtigt. Fügen wir deswegen (2.21) zu (2.22) hinzu, wobei jedes Produkt von Operatoren normalgeordnet sei, um Elektron - Positron Effekte richtig einzuschließen

$$a_\mu = \sum_\alpha a_\alpha \Pi_\mu^\alpha + \sum_\alpha a_\alpha^+ \tilde{\Pi}_\mu^\alpha + \sum_{\alpha, \beta} b_\alpha^+ b_\beta \Pi_\mu^{\alpha\beta} \quad (2.23a)$$

$$\rho_\mu = \sum_\alpha a_\alpha \overset{D}{\Pi}_\mu^\alpha + \sum_\alpha a_\alpha^+ \overset{D}{\tilde{\Pi}}_\mu^\alpha + \sum_{\alpha, \beta} b_\alpha^+ b_\beta \overset{D}{\Pi}_\mu^{\alpha\beta} \quad (2.23b)$$

Gleichzeitig sieht man, daß es unmöglich ist, den Ansatz (*) weiter beizubehalten, wenn neue Effekte beschrieben werden sollen: Man würde nämlich wieder nur relativistische H. + F. Gleichungen bekommen, die nicht an das Photonenfeld angekoppelt sind. Die Behebung dieses Mangels läßt sich durch Erweiterung des Ansatzes (*) um einige neue Glieder erzielen. Ein Ansatz für Ψ muß nämlich nicht nur ein Elektron vernichten können, sondern auch muß er Photonenvernichtungs- und Erzeugungsprozesse in sich enthalten. Die einfachste mögliche Wahl sieht also folgendermaßen aus

$$\Psi = \sum_\alpha b_\alpha \phi_\alpha + \sum_{\alpha, \beta} b_\alpha a_\beta \psi_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha, \beta} b_\alpha a_\beta^+ \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \quad (2.23c)$$

b_α ist ein Vernichteroperator eines freien Elektrons und a_α, a_α^+ sind die Vernichter- und Erzeugeroperatoren eines freien ("nackten") Photons im Zustand α .

Es ist also (2)

$$\{b_\alpha, b_\beta^+\} = [a_\alpha, a_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\{b_\alpha, b_\beta\} = \{b_\alpha^+, b_\beta^+\} = [a_\alpha, a_\beta] = [a_\alpha^+, a_\beta^+] = 0 \quad (2.24)$$

Die Ansätze (2.23a,b,c) drücken die Tatsache aus, daß die Operatoren Ψ, a_μ, p_μ , die die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Photonen phänomenologisch beschreiben, durch eine Kombination von Operatoren $b_\alpha, b_\alpha^+, a_\beta, a_\beta^+$, die für wechselwirkungsfreie Felder definiert sind, angenähert sind. Es sind die 9 Funktionen

$\phi_\alpha, \psi_{\alpha\beta}, \tilde{\psi}_{\alpha\beta}, \pi_\mu^\alpha, \tilde{\pi}_\mu^\alpha, \Pi_{\mu}^{\alpha\beta}, \overset{D}{\Pi}_{\mu}^\alpha, \overset{D}{\tilde{\Pi}}_\mu^\alpha, \overset{D}{\Pi}_\mu^{\alpha\beta}$ zu bestimmen. Differenzialgleichungen für $\phi, \dots, \Pi$ bekommt man, nachdem man den Ansatz (2.23a,b,c) in (2.20) eingesetzt und die Variationen von $\phi^{t+\delta t}, \dots, \Pi^{t+\delta t}$ durchgeführt hat. Diese Gleichungen beschreiben "optimal" alle Korrelationseffekte, die im Ansatz (2.23) enthalten sind.

3. Die Herleitung der Differentialgleichungen und ihre Eigenschaften

Aus dem Variationsprinzip folgt sofort, daß man nicht über alle Niveaus in (2.23) und über alle Zustände in (2.9) summieren darf, wenn man auf endliche Ergebnisse kommen will. Man muß die Mengen der Niveaus und Zustände abschneiden. Wir ändern also unseren Ansatz (2.23) folgendermaßen

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^N b_{\alpha} \phi_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\infty} (: b_{\alpha} a_{\beta} : \psi_{\alpha\beta} + : b_{\alpha} a_{\beta}^+ : \tilde{\psi}_{\alpha\beta}) \quad (3.1a)$$

$$a_{\mu} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (a_{\alpha} \pi_{\mu}^{\alpha} + a_{\alpha}^+ \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha}) + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ =1}}^N : b_{\alpha}^+ b_{\beta} : \pi_{\mu}^{\alpha\beta} \quad (3.1b)$$

$$p_{\mu} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (a_{\alpha} \overset{D}{\pi}_{\mu}^{\alpha} + a_{\alpha}^+ \overset{D}{\tilde{\pi}}_{\mu}^{\alpha}) + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ =1}}^N : b_{\alpha}^+ b_{\beta} : \overset{D}{\pi}_{\mu}^{\alpha\beta} \quad (3.1c)$$

Die Zustände $|I\rangle$, die in (2.9) auftreten, bekommt man, wenn man Operatoren a_{α}^+ , b_{β}^+ auf leere Elektronen- und Photonenniveaus wirken läßt.

Seien $F, \alpha \in (1, \dots, N)$

so daß $b_{\alpha}|0\rangle = 0$ für $\alpha > F$ und $b_{\alpha}^+|0\rangle = 0$ für $\alpha \leq F$ (3.2)

Bezeichnen wir ferner mit $|\tilde{0}\rangle_{\alpha}$ einen Zustand, in welchem alle Niveaus $1, \dots, N$ unbesetzt sind (nacktes Vakuum).

Dann definieren wir

$$|0\rangle = b_1^+ \dots b_F^+ |\tilde{0}\rangle_{\alpha} \quad (3.3)$$

was hier den Vakuumzustand definieren soll.

Sei weiterhin

$$\theta_{\alpha F} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \alpha > F \\ 0 & \text{wenn } \alpha \leq F \end{cases} \quad \text{und} \quad \theta_{\alpha F} + \bar{\theta}_{\alpha F} = 1 \quad (3.4)$$

dann gilt

$$: b_{\alpha}^{+} b_{\beta} : = b_{\alpha}^{+} b_{\beta} \theta_{\alpha F} \theta_{\beta F} + b_{\alpha}^{+} b_{\beta} \theta_{\alpha F} \bar{\theta}_{\beta F} \\ + b_{\alpha}^{+} b_{\beta} \bar{\theta}_{\alpha F} \theta_{\beta F} - b_{\beta} b_{\alpha}^{+} \bar{\theta}_{\alpha F} \bar{\theta}_{\beta F}$$

woraus folgt, daß

$$: b_{\alpha}^{+} b_{\beta} : = \delta_{\alpha\beta} \theta_{\alpha F} - b_{\beta} b_{\alpha}^{+} \quad (3.5)$$

Dieses Resultat werden wir des öfteren brauchen.

Analog kann man feststellen, daß

$$: b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} b_{\alpha''} : = \delta_{\alpha\alpha'} \theta_{\alpha F} b_{\alpha''} - \delta_{\alpha\alpha''} \theta_{\alpha F} b_{\alpha'} + b_{\alpha'} b_{\alpha''} b_{\alpha}^{+} \quad (3.6)$$

Die erste Serie von Gleichungen bekommt man, wenn man nach Variablen $\phi_{\alpha}^{t+\delta t}$, $\psi_{\alpha\beta}^{t+\delta t}$, $\bar{\psi}_{\alpha\beta}^{t+\delta t}$ variiert. Nach (2.9) bedeutet das, daß wir nur den ersten Term in $\mathcal{M}$ betrachten müssen.

Das heißt also

$$0 = \sum_{I,J} \delta |\langle I | \Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t} | J \rangle|^2 \quad (3.7)$$

oder

$$0 = \sum_{I,J} \delta \langle I | \Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t} | J \rangle \langle I | \Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t} | J \rangle^* \\ + \sum_{I,J} \langle I | \Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t} | J \rangle \delta \langle I | \Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t} | J \rangle^* \\ = \sum_{I,J} \langle I | \Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t} | J \rangle \delta \langle I | \Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t} | J \rangle^* \quad (3.8)$$

denn das erste Glied ist konjugiert zum zweiten.

Das können wir umschreiben

$$0 = \sum_{I,J} \langle I | \Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t} | J \rangle \langle I | \delta(\Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t}) | J \rangle^* \\ + \sum_{I,J} \langle I | \delta(\Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t}) | J \rangle^* \langle I | \Psi^{t+\delta t} - \psi^{t+\delta t} | J \rangle \quad (3.9)$$

Mit der Identität

$$\langle I | C | J \rangle^* = \langle J | C^\dagger | I \rangle \quad (3.10)$$

erhalten wir

$$0 = \sum_I \langle I | \{ \Psi^{t+\delta t} - \Psi^t, \delta(\Psi^{t+\delta t} - \Psi^t) \} | I \rangle \quad (3.11)$$

Dieses rein formale Umschreiben vermeidet, daß das Variationsprinzip abhängig von der Position der Variationen ist ($\delta \Psi^{t+\delta t}$ ist ein Operator und man möchte nur solche Ausdrücke erhalten, die unabhängig davon sind, wo $\delta \Psi^{t+\delta t}$ als Operator liegt).

Mit Hilfe von (3.11), (2.8) und (2.5) kommen wir zu

$$\begin{aligned} & \sum_I \langle I | \left\{ \sum_{\alpha=1}^N b_{\alpha}^+ \phi_{\alpha}^{t+\delta t} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} (b_{\alpha}^+ a_{\beta} \psi_{\alpha\beta}^{t+\delta t} + b_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{t+\delta t}) \right. \\ & + (-1 + \delta t \sum_{i=1}^3 \kappa^0 g^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \delta t m i g^0) \left(\sum_{\alpha=1}^N b_{\alpha}^+ \phi_{\alpha}^t + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} b_{\alpha}^+ a_{\beta} \psi_{\alpha\beta}^t \right. \\ & + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} b_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^t \left. \right) + \delta t e i g^0 \mu \left(\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\alpha'=1}^{\pi} a_{\alpha'}^+ b_{\alpha} \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha}^t \right. \\ & + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^{\pi} a_{\beta} a_{\beta'}^+ b_{\alpha} \Pi_{\mu}^{\beta\beta'} \psi_{\alpha\beta}^t + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^{\pi} a_{\beta}^+ a_{\beta'} b_{\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^t \Pi_{\mu}^{\beta\beta'} \\ & + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} a_{\beta}^+ b_{\alpha} \Pi_{\mu}^{\beta\alpha} \phi_{\alpha}^t + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^{\pi} a_{\beta}^+ a_{\beta'} b_{\alpha} \Pi_{\mu}^{\beta\beta'} \psi_{\alpha\beta}^t \\ & + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^{\pi} a_{\beta}^+ a_{\beta'}^+ b_{\alpha} \Pi_{\mu}^{\beta\beta'} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^t + \sum_{\alpha, \alpha', \alpha''=1}^N : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} b_{\alpha''} : \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha''}^t \\ & \left. \sum_{\alpha, \alpha', \alpha''=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} b_{\alpha''} : a_{\beta} \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha''\beta}^t \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha, \alpha', \alpha''=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} b_{\alpha''} : a_{\beta}^+ \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \tilde{\psi}_{\alpha''\beta}^t \right) \\ & + \sum_{\bar{\alpha}=1}^N b_{\bar{\alpha}}^+ \delta \phi_{\bar{\alpha}}^{*t+\delta t} + \sum_{\bar{\alpha}=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} b_{\bar{\alpha}}^+ a_{\beta}^+ \delta \psi_{\bar{\alpha}\beta}^{*t+\delta t} \\ & + \sum_{\bar{\alpha}=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} b_{\bar{\alpha}}^+ a_{\beta} \delta \tilde{\psi}_{\bar{\alpha}\beta}^{*t+\delta t} \left. \right\} | I \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei

$$\delta \phi_{\alpha}^t = \delta \psi_{\alpha\beta}^t = \delta \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^t = \delta \pi_{\mu}^{\alpha} = \delta \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha} - \delta \Pi_{\mu}^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.13)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die 3 ersten Variationen in (3.13) Spinoren sind. In (3.11) geht es um einen Antikommutator zweier beliebiger Spinorkomponenten: Eine von $\Psi^{t+\delta t} = \psi^{t+\delta t}$ und die andere von $\delta(\tilde{\Psi}^{t+\delta t} = \tilde{\psi}^{t+\delta t})$.

Aus der Gleichung (3.12) bekommen wir 3 Systeme von Differentialgleichungen für ϕ_{α} , $\psi_{\alpha\beta}$ und $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$. Für die Gleichung für ϕ_{α} tragen die folgenden fünf Glieder der Gleichung (3.12): 1., 4., 9., 11. und 13.

Wir haben also

$$\begin{aligned} & \sum_I \langle I | \sum_{\alpha=1}^N \{b_{\alpha}, b_{\alpha}^+\} \phi_{\alpha}^{t+\delta t} \\ & + (-1 + \delta t \sum_{i=1}^3 g_i g_i^* \frac{\partial}{\partial x^i} + \delta t m i \gamma^0) \sum_{\alpha=1}^N \{b_{\alpha}, b_{\alpha}^+\} \phi_{\alpha}^t \\ & + \delta t e i g_i \gamma^i \mu \left(\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^{\mathcal{N}} \{b_{\alpha} a_{\beta}^+ a_{\beta'}, b_{\alpha}^+\} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^t \Pi_{\mu}^{\beta\beta'} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^{\mathcal{N}} \{a_{\beta}^+ a_{\beta'} b_{\alpha}, b_{\alpha}^+\} \tilde{\pi}_{\mu}^{\beta\beta'} \psi_{\alpha\beta}^t \right) \\ & + \sum_{\alpha, \alpha', \alpha''=1}^N \{b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} b_{\alpha''}, b_{\alpha}^+\} \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha''}^t | I \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Um in der theoretischen Entwicklung fortzufahren, müssen wir die Anzahl der Zustände begrenzen: Wir berücksichtigen nur solche Zustände $|I\rangle$, wenn auf dem Platz i der Menge $(1, \dots, \mathcal{N})$ nicht mehr als ν_i Photonen sind.

Vor allem gilt

$$\{a_{\beta}^+ a_{\beta'} b_{\alpha}, b_{\alpha}^+\} = a_{\beta}^+ a_{\beta'} \delta_{\alpha\alpha} \quad (3.15)$$

und nach (3.6)

$$\begin{aligned}
 \{ : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'}, b_{\alpha''}^{+} : , b_{\bar{\alpha}}^{+} \} &= \delta_{\alpha\alpha'} \theta_{\alpha F} \delta_{\bar{\alpha}\alpha''} \\
 &- \delta_{\alpha\alpha''} \theta_{\alpha'' F} \delta_{\bar{\alpha}\alpha'} + \{ b_{\alpha'} b_{\alpha''} b_{\alpha}^{+}, b_{\bar{\alpha}}^{+} \} \\
 &= \delta_{\alpha\bar{\alpha}} b_{\alpha''} b_{\alpha}^{+} - \delta_{\alpha\bar{\alpha}} b_{\alpha'} b_{\alpha}^{+} \\
 &+ \delta_{\alpha\alpha'} \theta_{\alpha F} \delta_{\bar{\alpha}\alpha''} - \delta_{\alpha\alpha''} \theta_{\alpha'' F} \delta_{\bar{\alpha}\alpha'} \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Wir brauchen die Summe $\sum_I 1$. Dafür gilt offensichtlich

$$\sum_I 1 = 2^N \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} (\nu_i + 1) K \quad (3.17)$$

wobei K den Beitrag von allen Zuständen charakterisiert, die folgendermaßen aufgebaut sind

$$|I\rangle = b_{i_1}^{+} \dots b_{i_n}^{+} a_{j_1}^{+} \dots a_{j_m}^{+} |V\rangle \quad (3.18)$$

wobei $i_1, \dots, i_n$ außerhalb der Menge $(1, \dots, N)$ und $j_1, \dots, j_m$ außerhalb $(1, \dots, \mathcal{N})$ liegen und $|V\rangle$ ein Zustand ist, der voll mit Elektronen und Photonen bis zur Anzahl ν_i für jedes i aus $(1, \dots, \mathcal{N})$ besetzt ist. Es ist selbstverständlich, daß $K \rightarrow \infty$. Die Operatoren a_i, b_j wirken nur auf die Niveaus $(1, \dots, N)$ bzw. $(1, \dots, \mathcal{N})$. Daraus folgt, daß K ein gemeinsamer Faktor ist, der bei jedem Ausdruck auftritt, der die Eigenschaft hat, daß $\sum_I \langle I | \dots | I \rangle \sim K$ ist und daher gekürzt werden kann. Es sind die folgenden Erwartungswerte zu bestimmen

$$\begin{aligned}
 \langle I | a_{\beta}^{+} a_{\beta'} | I \rangle \quad \text{und} \quad \langle I | \{ : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'}, b_{\alpha''}^{+} : , b_{\bar{\alpha}}^{+} \} | I \rangle \\
 \langle I | a_{\beta}^{+} a_{\beta'} | I \rangle = \delta_{\beta\beta'} n_{\beta} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

wobei n_{β} die Anzahl der Photonen auf dem Platz β ist.

$$\begin{aligned}
 \sum_I \langle I | a_{\beta}^{+} a_{\beta'} | I \rangle &= \delta_{\beta\beta'} \sum_I n_{\beta} = \delta_{\beta\beta'} \sum_{n_{\beta}} \sum_I \\
 &\quad \text{ohne das } \beta\text{-Niveau} \\
 &= \delta_{\beta\beta'} \sum_{n_{\beta}} 2^N \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} (\nu_i + 1) = \delta_{\beta\beta'} \frac{\nu_{\beta}}{2} \cdot 2^N \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} (\nu_i + 1) \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Ähnlich findet man

$$\langle I | b_{\alpha}'' b_{\alpha}^+ | I \rangle = \delta_{\alpha\alpha}'' \quad \text{wenn} \quad b_{\alpha} | I \rangle = 0 \quad (3.21)$$

und daraus

$$\sum_I \langle I | b_{\alpha}'' b_{\alpha}^+ | I \rangle = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\alpha}'' 2^N \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \quad (3.22)$$

also insgesamt

$$\begin{aligned} \sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'}, b_{\alpha''} : , b_{\alpha}^+ \} | I \rangle &= [\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha\alpha''} (\theta_{\alpha F} - \frac{1}{2}) \\ &- \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\alpha\alpha''} (\theta_{\alpha'' F} - \frac{1}{2})] 2^N \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Führt man die Funktion $S_{\alpha F}$ ein

$$S_{\alpha F} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha > F \\ -1 & \text{für } \alpha \leq F \end{cases} \quad (3.24)$$

so sehen wir, daß

$$\frac{1}{2} S_{\alpha F} = \theta_{\alpha F} - \frac{1}{2} \quad (3.25)$$

Dann folgt aus (3.23)

$$\begin{aligned} \sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'}, b_{\alpha''} : , b_{\alpha}^+ \} | I \rangle \\ = \frac{1}{2} [\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha\alpha''} S_{\alpha F} - \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\alpha\alpha''} S_{\alpha'' F}] 2^N \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Setzen wir (3.17), (3.19) und (3.26) in (3.14) ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha}^{t+\delta t} + (-1 + \delta t \sum_{i=1}^3 \gamma^0 \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \delta t m i \gamma^0) \phi_{\alpha}^t + \delta t e i \gamma^0 \gamma^{\mu} \frac{1}{2} \\ \times \left(\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\substack{\beta, \beta' \\ =1}}^N \delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta'} \nu_{\beta} \left[\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^t \pi_{\mu}^{\beta'} + \tilde{\pi}_{\mu}^{\beta} \psi_{\alpha\beta'}^t \right] \right) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{\alpha, \alpha', \alpha'' \\ =1}}^N [\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha\alpha''} - \delta_{\alpha\alpha''} \delta_{\alpha\alpha'}] S_{\alpha F} \prod_{\mu}^{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha''}^{\mu} = 0 \quad (3.27)$$

wobei wir bereits den gemeinsamen Faktor $2^N \prod_{i=1}^N (V_i + 1)$ gekürzt haben. Einige der Summen links in (3.27) kann man leicht durchführen. Nach Multiplikation mit $i\gamma^0$ von links und Division mit $\delta\epsilon$ bekommt man für $\delta\epsilon \rightarrow 0$

$$i\gamma^{\mu} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - m \phi_{\alpha} - \frac{1}{2} e \gamma^{\mu} \left(\sum_{\beta=1}^N [\tilde{\psi}_{\alpha\beta} \pi_{\mu}^{\beta} + \tilde{\pi}_{\mu}^{\beta} \psi_{\alpha\beta}] \right) \gamma_{\beta} + \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} [\pi_{\mu}^{\alpha\alpha} \phi_{\alpha} - \pi_{\mu}^{\alpha\bar{\alpha}} \phi_{\alpha}] = 0 \quad (3.28)$$

Für die Aufstellung der Gleichungen für $\psi_{\alpha\beta}$ braucht man das 2., 5., 7. und 14. Glied aus (3.12). Dabei ist es günstig, folgende Identität zu benutzen

$$\{AB, CD\} = A[B, C]D + \{A, C\}BD - CA[B, D] - C[A, D]B \quad (3.29)$$

Man hat die folgenden Antikommutatoren zu bestimmen

$$\{b_{\alpha} a_{\beta}, b_{\bar{\alpha}}^{+} a_{\bar{\beta}}^{+}\} \quad \text{und} \quad \{b_{\alpha}^{+} b_{\alpha}, b_{\alpha''}^{+} a_{\beta} a_{\bar{\alpha}}^{+} a_{\bar{\beta}}^{+}\}.$$

Nach (3.29) ist

$$\begin{aligned} \{b_{\alpha} a_{\beta}, b_{\bar{\alpha}}^{+} a_{\bar{\beta}}^{+}\} &= \delta_{\alpha\bar{\alpha}} a_{\beta} a_{\bar{\beta}}^{+} - b_{\bar{\alpha}}^{+} b_{\alpha} \delta_{\beta\bar{\beta}} \\ &= \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \delta_{\beta\bar{\beta}} + \delta_{\alpha\bar{\alpha}} a_{\beta}^{+} a_{\bar{\beta}} - b_{\bar{\alpha}}^{+} b_{\alpha} \delta_{\beta\bar{\beta}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

und

$$\begin{aligned} \langle I | \{b_{\alpha} a_{\beta}, b_{\bar{\alpha}}^{+} a_{\bar{\beta}}^{+}\} | I \rangle \\ = \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \delta_{\beta\bar{\beta}} + \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \delta_{\beta\bar{\beta}} n_{\beta} - \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \delta_{\beta\bar{\beta}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

wenn $b_\alpha |I\rangle = 0$ (das gilt für das letzte Glied in (3.31); sonst ist dies Null!)

Daraus bilden wir

$$\begin{aligned} \sum_I \langle I | \{ b_\alpha a_\beta, b_\alpha^+ a_\beta^+ \} | I \rangle \\ = \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \delta_{\beta\bar{\beta}} \left(1 + \frac{\nu_\beta}{2} - \frac{1}{2} \right) 2^N \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \\ = \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \delta_{\beta\bar{\beta}} (1 + \nu_\beta) 2^{N-1} \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ähnlich behandeln wir nach (3.29) und (3.6)

$$\begin{aligned} \{ : b_\alpha^+ b_\alpha, b_\alpha^+ : a_\beta, b_\alpha^+ a_\beta^+ \} &= \{ : b_\alpha^+ b_\alpha, b_\alpha^+ : , b_\alpha^+ \} a_\beta a_\beta^+ \\ - b_\alpha^+ : b_\alpha^+ b_\alpha, b_\alpha^+ : \delta_{\beta\bar{\beta}} &= \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \theta_{\alpha F} \delta_{\alpha\bar{\alpha}} a_\beta a_\beta^+ \\ - \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \theta_{\alpha F} \delta_{\alpha\bar{\alpha}} a_\beta a_\beta^+ + b_\alpha^+ b_\alpha^+ b_\alpha^+ b_\alpha^+ a_\beta a_\beta^+ \\ + b_\alpha^+ b_\alpha^+ b_\alpha^+ b_\alpha^+ a_\beta a_\beta^+ - \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \theta_{\alpha F} \delta_{\beta\bar{\beta}} b_\alpha^+ b_\alpha^+ \\ + \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \theta_{\alpha F} b_\alpha^+ b_\alpha^+ \delta_{\beta\bar{\beta}} - b_\alpha^+ b_\alpha^+ b_\alpha^+ b_\alpha^+ \delta_{\beta\bar{\beta}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Es ist

$$b_\alpha^+ b_\alpha^+ b_\alpha^+ b_\alpha^+ (a_\beta a_\beta^+ - \delta_{\beta\bar{\beta}}) = b_\alpha^+ b_\alpha^+ b_\alpha^+ b_\alpha^+ a_\beta^+ a_\beta$$

Die 3., 4. und 7. Glieder aus (3.33) können vereinigt werden in die Form

$$\delta_{\alpha' \bar{\alpha}} b_{\alpha''} b_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ a_{\beta} - \delta_{\bar{\alpha} \alpha''} b_{\alpha'} b_{\alpha}^+ a_{\beta}^+ a_{\beta} + b_{\alpha'} b_{\alpha''} b_{\alpha}^+ b_{\bar{\alpha}}^+ \delta_{\beta \bar{\beta}}$$

Weiter kann man feststellen, daß

$$\langle I | b_{\alpha'} b_{\alpha''} b_{\alpha}^+ b_{\bar{\alpha}}^+ | I \rangle = \delta_{\alpha \alpha''} \delta_{\alpha' \bar{\alpha}} - \delta_{\alpha' \bar{\alpha}} \delta_{\alpha \alpha''} \quad (3.34)$$

wenn $\alpha \neq \bar{\alpha}$

und $b_{\alpha} | I \rangle = b_{\bar{\alpha}} | I \rangle = 0$

Es ist also

$$\begin{aligned} & \sum_F \langle I | \{ b_{\alpha'} b_{\alpha''} b_{\alpha}^+ b_{\bar{\alpha}}^+ : a_{\beta}, b_{\bar{\alpha}}^+ a_{\beta}^+ \} | I \rangle \\ &= \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{\bar{\alpha} \alpha''} \delta_{\beta \bar{\beta}} \left(\Theta_{\alpha F} + \frac{\nu_{\bar{\beta}}}{2} \Theta_{\alpha F} - \frac{\nu_{\bar{\beta}}}{4} - \frac{1}{4} - \Theta_{\alpha F} \frac{1}{2} \right) 2^N \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \\ & - \delta_{\alpha \alpha''} \delta_{\bar{\alpha} \alpha'} \delta_{\beta \bar{\beta}} \left(\Theta_{\alpha'' F} + \frac{\nu_{\bar{\beta}}}{2} \Theta_{\alpha'' F} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\nu_{\bar{\beta}}}{4} - \frac{1}{4} - \Theta_{\alpha'' F} \frac{1}{2} \right) 2^N \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Wenn wir (3.25) benutzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_F \langle I | \{ b_{\alpha'} b_{\alpha''} b_{\alpha}^+ b_{\bar{\alpha}}^+ : a_{\beta}, b_{\bar{\alpha}}^+ a_{\beta}^+ \} | I \rangle \\ &= (\delta_{\alpha \alpha'} \delta_{\bar{\alpha} \alpha''} - \delta_{\alpha \alpha''} \delta_{\bar{\alpha} \alpha'}) \delta_{\beta \bar{\beta}} S_{\alpha F} (\nu_{\bar{\beta}} + 1) 2^{N-2} \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Mit (3.32) und (3.36) kann man schließlich schreiben (der gemeinsame Faktor $2^{N-1} (\nu_{\bar{\beta}} + 1) \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1)$ wird gekürzt), nachdem die Summen durchgeführt worden sind.

$$\begin{aligned} & i \gamma_{\mu} \frac{\partial \psi_{\alpha \bar{\beta}}}{\partial x^{\mu}} - m \psi_{\alpha \bar{\beta}} \\ & - e \gamma_{\mu} \left(\pi_{\mu}^{\bar{\beta}} \phi_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \left[\prod_{\mu}^{\alpha \alpha} \psi_{\alpha \bar{\beta}} - \prod_{\mu}^{\alpha \bar{\alpha}} \psi_{\alpha \bar{\beta}} \right] \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Für den Fall $\tilde{\Psi}_{\alpha\bar{\beta}}$ tragen die 3., 6., 10. und 15. Glieder bei. Hier geht es wiederum um die Antikommutatoren $\{b_{\alpha} a_{\beta}^+, b_{\alpha}^+ a_{\beta}\}$ und $\{b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} b_{\alpha''} : a_{\beta}^+, b_{\alpha}^+ a_{\beta}\}$, die ähnlich behandelt werden können. Wir notieren hier nur die Zwischenergebnisse. Es ist vor allem

$$\begin{aligned} \sum_I \langle I | \{b_{\alpha} a_{\beta}^+, b_{\alpha}^+ a_{\beta}\} | I \rangle \\ = \delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\bar{\beta}} (\nu_{\beta} + 1) 2^{N-1} \prod_{i=1}^{\kappa} (\nu_i + 1) \end{aligned} \quad (3.38)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_I \langle I | \{b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} b_{\alpha''} : a_{\beta}^+, b_{\alpha}^+ a_{\beta}\} | I \rangle \\ = (\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha''\bar{\alpha}} - \delta_{\alpha\alpha''} \delta_{\alpha'\bar{\alpha}}) \delta_{\beta\bar{\beta}} \delta_{\alpha\bar{\alpha}} 2^{N-2} \prod_{i=1}^{\kappa} (\nu_i + 1) (\nu_{\beta} + 1) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Diese Ausdrücke stimmen mit (3.32) bzw. (3.36) überein.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} i g^{\mu} \frac{\partial \tilde{\Psi}_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial x^{\mu}} - m \tilde{\Psi}_{\alpha\bar{\beta}} \\ - e g^{\mu} \left(\tilde{\Pi}_{\mu}^{\bar{\beta}} \phi_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \left[\Pi_{\mu}^{\alpha\alpha} \tilde{\Psi}_{\alpha\bar{\beta}} - \Pi_{\mu}^{\alpha\bar{\alpha}} \tilde{\Psi}_{\alpha\bar{\beta}} \right] \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Das ist die erste Serie von Gleichungen für ϕ_{α} , $\psi_{\alpha\bar{\beta}}$, $\tilde{\Psi}_{\alpha\bar{\beta}}$. Für die Herleitung der zweiten Serie benötigen wir nur das zweite Glied von (2.7). Es ist klar, daß wir jetzt statt (3.11) dies schreiben dürfen

$$0 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_I \langle I | \{a_{\mu}^{t+\delta t} - A_{\mu}^{t+\delta t}, \delta(a_{\mu}^{t+\delta t} - A_{\mu}^{t+\delta t})^{\dagger}\} | I \rangle \quad (3.41)$$

Nach (2.8) und (3.41) ist es

$$\sum_I \sum_{\mu=0}^3 \langle I | \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_{\alpha} \Pi_{\mu}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_{\alpha}^+ \tilde{\Pi}_{\mu}^{\alpha} + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ =1}}^N b_{\alpha}^+ b_{\beta} : \prod_{\mu}^{\alpha\beta} \right\}^{(t+\delta t)} | I \rangle$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} a_{\alpha} \pi_{\mu}^{\alpha(t)} - \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} a_{\alpha}^{+} \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha(t)} - \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ =1}}^{\mathcal{N}} : b_{\alpha}^{+} b_{\beta} : \pi_{\mu}^{\alpha, \beta(t)} \\
& - \delta t \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} a_{\alpha} \pi_{\mu}^{\alpha D(t)} - \delta t \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} a_{\alpha}^{+} \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha D(t)} - \delta t \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ =1}}^{\mathcal{N}} : b_{\alpha}^{+} b_{\beta} : \pi_{\mu}^{\alpha, \beta D(t)} \\
& + \sum_{\bar{\alpha}=1}^{\mathcal{N}} a_{\bar{\alpha}}^{+} \delta \pi_{\mu}^{\bar{\alpha}(t+\delta t)} + \sum_{\bar{\alpha}=1}^{\mathcal{N}} a_{\bar{\alpha}} \delta \tilde{\pi}_{\mu}^{\bar{\alpha}(t+\delta t)} \\
& + \sum_{\substack{\bar{\alpha}, \bar{\beta} \\ =1}}^{\mathcal{N}} : b_{\bar{\alpha}}^{+} b_{\bar{\beta}} : \delta \pi_{\mu}^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}(t+\delta t)} \} |I\rangle = 0
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Wieder wird gefordert, daß

$$\delta \pi_{\mu}^{\alpha(t)} = \delta \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha(t)} = \delta \pi_{\mu}^{\alpha, \beta(t)} = \delta \pi_{\mu}^{\alpha D(t)} = \delta \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha D(t)} = \delta \pi_{\mu}^{\alpha, \beta D(t)} = 0$$

Betrachten wir zunächst die Gleichung für $\pi_{\mu}^{\bar{\alpha}}$. Hier tragen die 1., 4. und 7. Glieder bei, Das heißt

$$\begin{aligned}
& \sum_I \langle I | \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \{a_{\alpha}, a_{\bar{\alpha}}^{+}\} \pi_{\mu}^{\alpha(t+\delta t)} \\
& - \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \{a_{\alpha}, a_{\bar{\alpha}}^{+}\} \pi_{\mu}^{\alpha(t)} - \delta t \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \{a_{\alpha}, a_{\bar{\alpha}}^{+}\} \pi_{\mu}^{\alpha D(t)} | I \rangle = 0
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Jedoch

$$\{a_{\alpha}, a_{\bar{\alpha}}^{+}\} = \delta_{\alpha \bar{\alpha}} + 2 a_{\bar{\alpha}}^{+} a_{\alpha} \tag{3.44}$$

und deswegen

$$\begin{aligned}
& \sum_I \langle I | \{a_{\alpha}, a_{\bar{\alpha}}^{+}\} | I \rangle = \delta_{\alpha \bar{\alpha}} \left(1 + 2 \frac{\nu_{\bar{\alpha}}}{2}\right) 2^{\mathcal{N}} \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} (\nu_i + 1) \\
& = \delta_{\alpha \bar{\alpha}} (\nu_{\bar{\alpha}} + 1) 2^{\mathcal{N}} \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} (\nu_i + 1)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Alle drei Glieder in (3.43) enthalten diesen Faktor, den wir also kürzen

$$\prod_{\mu}^{\dot{\bar{\alpha}}(t+\delta t)} - \prod_{\mu}^{\dot{\bar{\alpha}}(t)} - \delta t \prod_{\mu}^{D \dot{\bar{\alpha}}(t)} = 0 \quad (3.46)$$

oder

$$\dot{\prod}_{\mu}^{\bar{\alpha}} = \prod_{\mu}^{D \bar{\alpha}} \quad (3.47)$$

Dieselbe Überlegung führt uns zu

$$\dot{\prod}_{\mu}^{\bar{\alpha}} = \prod_{\mu}^{D \bar{\alpha}} \quad (3.48)$$

Ähnlich schreiben wir

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \\ = 1}}^N \sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^{+} b_{\beta}^{+} : ; : b_{\bar{\alpha}}^{+} b_{\bar{\beta}}^{+} : ^{+} \} | I \rangle \times \left(\prod_{\mu}^{\dot{\bar{\alpha}}\dot{\bar{\beta}}(t+\delta t)} - \prod_{\mu}^{\dot{\bar{\alpha}}\dot{\bar{\beta}}(t)} - \delta t \prod_{\mu}^{D \dot{\bar{\alpha}}\dot{\bar{\beta}}(t)} \right) = 0 \quad (3.49)$$

Wieder muß man $\{ : b_{\alpha}^{+} b_{\beta}^{+} : ; : b_{\bar{\alpha}}^{+} b_{\bar{\beta}}^{+} : ^{+} \}$ bestimmen.

Dazu brauchen wir (3.5) und folgende Identität

$$\begin{aligned} \{AB, CD\} &= A\{B, C\}D - \{A, C\}BD + CA\{B, D\} \\ &\quad - C\{A, D\}B + 2CDAB \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nach (3.5) haben wir

$$\begin{aligned} \{ : b_{\alpha}^{+} b_{\beta}^{+} : ; : b_{\bar{\alpha}}^{+} b_{\bar{\beta}}^{+} : ^{+} \} &= 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\theta_{\alpha F}\theta_{\bar{\alpha}F} - 2\delta_{\alpha\beta}\theta_{\alpha F}b_{\alpha}b_{\bar{\beta}}^{+} \\ &\quad - 2\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\theta_{\bar{\alpha}F}b_{\beta}b_{\alpha}^{+} + \{b_{\beta}b_{\alpha}^{+}, b_{\bar{\alpha}}b_{\bar{\beta}}^{+}\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Den letzten Antikommutator stellen wir mittels (3.50) fest

$$\{b_\beta b_\alpha^+, b_{\bar{\alpha}} b_{\bar{\beta}}^+\} \\ = b_\beta b_{\bar{\beta}}^+ \delta_{\alpha\bar{\alpha}} - b_{\bar{\alpha}} b_\alpha^+ \delta_{\beta\bar{\beta}} + 2 b_{\bar{\alpha}} b_{\bar{\beta}}^+ b_\beta b_\alpha^+ \quad (3.52)$$

Es ist also

$$\{ : b_\alpha^+ b_\beta : , : b_{\bar{\alpha}}^+ b_{\bar{\beta}} : ^+ \} = 2 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \theta_{\alpha F} \theta_{\bar{\alpha} F} - 2 \delta_{\alpha\bar{\beta}} \theta_{\alpha F} b_{\bar{\alpha}} b_{\bar{\beta}}^+ \\ - 2 \delta_{\bar{\alpha}\beta} \theta_{\bar{\alpha} F} b_\beta b_\alpha^+ + b_\beta b_{\bar{\beta}}^+ b_{\alpha\bar{\alpha}} - b_{\bar{\alpha}} b_\alpha^+ \delta_{\beta\bar{\beta}} \\ + 2 b_{\bar{\alpha}} b_\alpha^+ \delta_{\beta\bar{\beta}} - 2 b_{\bar{\alpha}} b_\beta b_{\bar{\beta}}^+ b_\alpha^+ \quad (3.53)$$

und

$$\sum_I \langle I | \{ : b_\alpha^+ b_\beta : , : b_{\bar{\alpha}}^+ b_{\bar{\beta}} : ^+ \} | I \rangle \\ = \left[\delta_{\alpha\beta} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} (2 \theta_{\alpha F} \theta_{\bar{\alpha} F} - \theta_{\alpha F} - \theta_{\bar{\alpha} F} + \frac{1}{2}) \right. \\ \left. + \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \delta_{\beta\bar{\beta}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} \right) \right] 2^N \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \quad (3.54)$$

Ferner verifizieren wir leicht, daß

$$2 \theta_{\alpha F} \theta_{\bar{\alpha} F} - \theta_{\alpha F} - \theta_{\bar{\alpha} F} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} S_{\alpha F} S_{\bar{\alpha} F} \quad (3.55)$$

so daß

$$\sum_I \langle I | \{ : b_\alpha^+ b_\beta : , : b_{\bar{\alpha}}^+ b_{\bar{\beta}} : ^+ \} | I \rangle \\ = (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} S_{\alpha F} S_{\bar{\alpha} F} + \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \delta_{\beta\bar{\beta}}) 2^{N-1} \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \quad (3.56)$$

Wenn $\alpha \neq \bar{\beta}$, fällt das erste Glied in (3.56) weg, und, nachdem wir über α und β aufsummiert haben, bekommen wir

$$\prod_{\mu}^{(t+\delta t)} \bar{\alpha}\bar{\beta} - \prod_{\mu}^{(t)} \bar{\alpha}\bar{\beta} - \delta t \prod_{\mu}^D \bar{\alpha}\bar{\beta} = 0, \quad \alpha \neq \bar{\beta} \quad (3.57)$$

Sei nun $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$. Dann folgt

$$\sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \left(\prod_{\mu}^{\alpha, (t+\delta t)} - \prod_{\mu}^{\alpha, (t)} - \delta t \prod_{\mu}^{\alpha, D(t)} \right) S_{\alpha F} \\ + \left(\prod_{\mu}^{\bar{\alpha}, (t+\delta t)} - \prod_{\mu}^{\bar{\alpha}, (t)} - \delta t \prod_{\mu}^{\bar{\alpha}, D(t)} \right) S_{\bar{\alpha} F} = 0 \quad (3.58)$$

Summieren wir über $\bar{\alpha}$, so ist

$$(\mathcal{N} + 1) \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} \left(\prod_{\mu}^{\alpha, (t+\delta t)} - \prod_{\mu}^{\alpha, (t)} - \delta t \prod_{\mu}^{\alpha, D(t)} \right) S_{\alpha F} \quad (3.59)$$

Das eingesetzt in (3.58) ergibt

$$\prod_{\mu}^{\bar{\alpha}, (t+\delta t)} - \prod_{\mu}^{\bar{\alpha}, (t)} - \delta t \prod_{\mu}^{\bar{\alpha}, D(t)} = 0 \quad (3.60)$$

(3.57) und (3.60) vereinigen sich in

$$\prod_{\mu}^{\bar{\alpha}} = \prod_{\mu}^{\bar{\alpha}, D} \quad (3.61)$$

Dadurch ist die zweite Serie von Gleichungen abgeleitet. Zur Herleitung der dritten Serie, braucht man nur das dritte Glied in (2.7).

Man kann, wie früher, dieses schreiben

$$\sum_I \sum_{\mu=0}^3 \langle I | \left\{ \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} a_{\alpha} \prod_{\mu}^{\alpha, D(t+\delta t)} + \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} a_{\alpha}^+ \prod_{\mu}^{\alpha, D(t+\delta t)} + \sum_{\alpha, \beta=1}^{\mathcal{N}} : b_{\alpha}^+ b_{\beta}^+ : \prod_{\mu}^{\alpha, \beta, D(t+\delta t)} \right. \\ \left. - (1 + \delta t \Delta) \left(\sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} a_{\alpha} \prod_{\mu}^{\alpha, D(t)} + \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}} a_{\alpha}^+ \prod_{\mu}^{\alpha, D(t)} + \sum_{\alpha, \beta=1}^{\mathcal{N}} : b_{\alpha}^+ b_{\beta}^+ : \prod_{\mu}^{\alpha, \beta, D(t)} \right) \right. \\ \left. - \delta t e \left(\sum_{\alpha, \alpha'=1}^{\mathcal{N}} : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'}^+ : \phi_{\alpha}^+ \delta_{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha'} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\alpha, \alpha'=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'}^+ : a_{\beta} \phi_{\alpha}^+ \delta_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha\beta} \right. \\ \left. + \sum_{\alpha, \alpha'=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'}^+ : a_{\beta}^+ \phi_{\alpha}^+ \delta_{\alpha\alpha'} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \right. \\ \left. + \sum_{\alpha, \alpha'=1}^{\mathcal{N}} \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'}^+ : a_{\beta}^+ \psi_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha'} \right) \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^{\infty} : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} : a_{\beta}^{+} a_{\beta'} \psi_{\alpha\beta}^{+(t)} \gamma_0 \gamma_{\mu} \psi_{\alpha'\beta'}^{(t)} \\
 & + \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^{\infty} : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} : a_{\beta}^{+} a_{\beta'} \psi_{\alpha\beta}^{+(t)} \gamma_0 \gamma_{\mu} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta'}^{(t)} \\
 & \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\infty} : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} : a_{\beta} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{+(t)} \gamma_0 \gamma_{\mu} \phi_{\alpha'}^{(t)} \\
 & + \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^{\infty} : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} : a_{\beta} a_{\beta'} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{+(t)} \gamma_0 \gamma_{\mu} \psi_{\alpha'\beta'}^{(t)} \\
 & \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^{\infty} : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} : a_{\beta'}^{+} a_{\beta} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{+(t)} \gamma_0 \gamma_{\mu} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta'}^{(t)}, \\
 & \sum_{\bar{z}=1}^{\infty} a_{\bar{z}}^{+} \delta \pi_{\mu}^{\bar{z}} + \sum_{\bar{z}=1}^{\infty} a_{\bar{z}} \delta \tilde{\pi}_{\mu}^{\bar{z}} \\
 & + \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}=1}^N : b_{\bar{\alpha}}^{+} b_{\bar{\beta}} : + \delta \pi_{\mu}^{\bar{\alpha}} \tilde{\pi}_{\bar{\beta}} \} |I\rangle = 0
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Wieder sind alle Variationen im Augenblick t aus gesuchten Funktionen gleich Null.

Für die Bildung der Gleichungen für $\pi_{\mu}^{\bar{\alpha}}$ braucht man fünf Glieder: das 1., 4., 8. und 13. in der Gleichung (3.62). Also haben wir

$$\begin{aligned}
 & \sum_I \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} [\langle I | \{ a_{\alpha}, a_{\bar{\alpha}}^{+} \} | I \rangle \pi_{\mu}^{\alpha} - \langle I | \{ a_{\alpha}, a_{\bar{\alpha}}^{+} \} | I \rangle \pi_{\mu}^{\alpha}] \right. \\
 & - \delta t \sum_{\alpha=1}^{\infty} \langle I | \{ a_{\alpha}, a_{\bar{\alpha}}^{+} \} | I \rangle \Delta \pi_{\mu}^{\alpha} \\
 & - \delta t e \left[\sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\infty} \langle I | \{ : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} : a_{\beta}^{+} : \} | I \rangle \phi_{\alpha}^{+(t)} \gamma_0 \gamma_{\mu} \psi_{\alpha'\beta}^{(t)} \right. \\
 & \left. + \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\infty} \langle I | \{ : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} : a_{\beta}^{+} : \} | I \rangle \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{+(t)} \gamma_0 \gamma_{\mu} \phi_{\alpha'}^{(t)} \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Die ersten drei Matrixelemente haben wir schon in (3.45) bestimmt; es bleibt also noch $\langle I | \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : a_{\beta}, a_{\bar{\alpha}}^+ \} | I \rangle$ zu berechnen. Um die Rechnungen wieder zu vereinfachen, benutzen wir die Identität

$$\{AB, C\} = A[B, C] + [A, C]B + 2CAB \quad (3.64)$$

und Gleichung (3.5). Es ist also

$$\begin{aligned} & \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : a_{\beta}, a_{\bar{\alpha}}^+ \} \\ &= : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : \delta_{\beta\bar{\alpha}} + 2a_{\bar{\alpha}}^+ a_{\beta} : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : \end{aligned} \quad (3.65)$$

und mittels (3.5)

$$\begin{aligned} \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : a_{\beta}, a_{\bar{\alpha}}^+ \} &= \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\bar{\alpha}\beta} \theta_{\alpha F} - b_{\alpha'} b_{\alpha}^+ \delta_{\bar{\alpha}\beta} \\ &+ 2 \delta_{\alpha\alpha'} \theta_{\alpha F} a_{\bar{\alpha}}^+ a_{\beta} - 2 a_{\bar{\alpha}}^+ a_{\beta} b_{\alpha'} b_{\alpha}^+ \end{aligned} \quad (3.66)$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} & \sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : a_{\beta}, a_{\bar{\alpha}}^+ \} | I \rangle \\ &= \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\bar{\alpha}\beta} \left(\theta_{\alpha F} - \frac{1}{2} + 2 \theta_{\alpha F} \frac{\nu_{\bar{\alpha}}}{2} - 2 \frac{\nu_{\bar{\alpha}}}{4} \right) 2^N \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : a_{\beta}, a_{\bar{\alpha}}^+ \} | I \rangle \\ &= \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\bar{\alpha}\beta} S_{\alpha F} (\nu_{\bar{\alpha}} + 1) 2^{N-1} \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Nachdem man die üblichen Umordnungen durchgeführt hat, bekommt man

$$\square \pi_{\mu}^{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} e \left(\sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}^+ g_{\alpha\mu} \psi_{\alpha\bar{\alpha}} S_{\alpha F} + \sum_{\alpha=1}^N \tilde{\psi}_{\alpha\bar{\alpha}}^+ g_{\alpha\mu} \phi_{\alpha} S_{\alpha F} \right) \quad (3.69)$$

unter Benutzung von (3.47)

Die Gleichungen für $\prod_{\mu}^D \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha}$ kann man auf dieselbe Weise finden: Hier tragen das 2., 5., 9. und 10. Glied von (3.62) bei. Wir erhalten

$$\sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : a_{\beta}^+ a_{\beta'} : \} | I \rangle$$

$$= \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} S_{\alpha\beta} (\nu_{\alpha} + 1) 2^{N-1} \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \quad (3.70)$$

was mit (3.68) übereinstimmt, so daß wie früher

$$\square \prod_{\mu}^D \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} e \left(\sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}^+ \delta_{\alpha} \delta_{\mu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha=1}^N \psi_{\alpha\beta}^+ \delta_{\alpha} \delta_{\mu} \phi_{\alpha} S_{\alpha\beta} \right) \quad (3.71)$$

wenn (3.48) benutzt wird.

Als letzte bleibt die Herleitung der Gleichungen für $\prod_{\mu}^D \alpha_{\beta}$. Weil das 3., 6., 7., 11. und 15. Glied in diesem Fall beitragen, schreiben wir gleich, unter Berücksichtigung von (3.61)

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^N \sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^+ b_{\beta} : , : b_{\alpha'}^+ b_{\beta'} :^+ \} | I \rangle \square \prod_{\mu}^D \alpha_{\beta}$$

$$= e \left[\sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : , : b_{\alpha}^+ b_{\beta} :^+ \} | I \rangle \phi_{\alpha}^+ \delta_{\alpha} \delta_{\mu} \phi_{\alpha'} \right.$$

$$+ \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^N \sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : a_{\beta}^+ a_{\beta'} : , : b_{\alpha}^+ b_{\beta} :^+ \} | I \rangle \psi_{\alpha\beta}^+ \delta_{\alpha} \delta_{\mu} \psi_{\alpha'\beta'} \left.
$$\sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta, \beta'=1}^N \sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^+ b_{\alpha'} : a_{\beta}^+ a_{\beta'} : , : b_{\alpha}^+ b_{\beta} :^+ \} | I \rangle \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \delta_{\alpha} \delta_{\mu} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta'} \quad (3.72)$$$$

Die ersten beiden Matrixelemente kennen wir aus (3.56); für die beiden letzten gilt

$$\{AB, C\} = A[B, C] + \{A, C\}B \quad (3.73)$$

Das bedeutet

Das bedeutet

$$\begin{aligned} & \{ : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} : a_{\beta}^{+} a_{\beta'} : b_{\bar{\alpha}}^{+} b_{\bar{\beta}} : + \} \\ & = \{ : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} : : b_{\bar{\alpha}}^{+} b_{\bar{\beta}} : + \} a_{\beta}^{+} a_{\beta'} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Man sieht sofort, daß

$$\begin{aligned} & \sum_I \langle I | \{ : b_{\alpha}^{+} b_{\alpha'} : a_{\beta}^{+} a_{\beta'} : b_{\bar{\alpha}}^{+} b_{\bar{\beta}} : + \} | I \rangle \\ & = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} S_{\alpha F} S_{\bar{\alpha} F} + \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \delta_{\alpha'\bar{\beta}}) \frac{1}{2} \nu_{\beta} \delta_{\beta\beta'} 2^N \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \\ & = \frac{1}{4} \nu_{\beta} (\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} S_{\alpha F} S_{\bar{\alpha} F} + \delta_{\alpha\bar{\alpha}} \delta_{\alpha'\bar{\beta}}) \delta_{\beta\beta'} 2^N \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Der Faktor $2^{N-1} \prod_{i=1}^N (\nu_i + 1)$ kann gekürzt werden, so daß

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^N \square \prod_{\mu}^{\alpha\alpha} S_{\alpha F} S_{\bar{\alpha} F} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \square \prod_{\mu}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \\ & = e \left[\sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}^{+} \gamma_0 \gamma_{\mu} \phi_{\alpha} S_{\alpha F} S_{\bar{\alpha} F} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \phi_{\bar{\alpha}}^{+} \gamma_0 \gamma_{\mu} \phi_{\bar{\beta}} \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \psi_{\alpha\beta}^{+} \gamma_0 \gamma_{\mu} \psi_{\alpha\beta} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} S_{\alpha F} S_{\bar{\alpha} F} \nu_{\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^N \psi_{\bar{\alpha}\beta}^{+} \gamma_0 \gamma_{\mu} \psi_{\bar{\beta}\beta} \nu_{\beta} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{+} \gamma_0 \gamma_{\mu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} S_{\alpha F} S_{\bar{\alpha} F} \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \nu_{\beta} \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^N \tilde{\psi}_{\bar{\alpha}\beta}^{+} \gamma_0 \gamma_{\mu} \tilde{\psi}_{\bar{\beta}\beta} \nu_{\beta} \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

Wenn $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$, fallen alle ungeraden Glieder aus. Diskutieren wir den Fall $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$. Multiplizieren wir (3.76) mit $S_{\bar{\alpha} F}$ und summieren wir

anschließend über $\bar{\alpha}$ von 1 bis N. Dann, nachdem wir den Faktor (N+1) weggelassen haben, bekommen wir

$$\sum_{\alpha=1}^N \square \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha} S_{\alpha F} = e \left[\sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}^{+} g_0 g_{\mu} \phi_{\alpha} S_{\alpha F} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\kappa} (\psi_{\alpha\beta}^{+} g_0 g_{\mu} \psi_{\alpha\beta} S_{\alpha F} \nu_{\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{+} g_0 g_{\mu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} S_{\alpha F} \nu_{\beta}) \right] \quad (3.77)$$

Multiplizieren wir (3.77) wieder mit $S_{\alpha F}$, so stellen wir fest, daß die ungeraden Glieder in (3.76) nach (3.77) wegfallen. Wir haben daher insgesamt

$$\square \Pi_{\mu}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = e \left[\phi_{\bar{\alpha}}^{+} g_0 g_{\mu} \phi_{\bar{\beta}} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{\kappa} \psi_{\bar{\alpha}\beta}^{+} g_0 g_{\mu} \psi_{\bar{\beta}\beta} \nu_{\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{\kappa} \tilde{\psi}_{\bar{\alpha}\beta}^{+} g_0 g_{\mu} \tilde{\psi}_{\bar{\beta}\beta} \nu_{\beta} \right] \quad (3.78)$$

Nun fassen wir alle Gleichungen zusammen, das heißt (3.28), (3.37), (3.40), (3.69), (3.71), (3.77):

$$i g_{\mu} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - m \phi_{\alpha} - \frac{1}{2} e g_{\mu} \left[\sum_{\beta=1}^{\kappa} (\tilde{\psi}_{\alpha\beta} \Pi_{\mu}^{\beta} + \psi_{\alpha\beta} \tilde{\Pi}_{\mu}^{\beta}) \nu_{\beta} + \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha} - \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha'}) \right] = 0 \quad (3.79)$$

$$i g_{\mu} \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - m \psi_{\alpha\beta} - e g_{\mu} \left[\Pi_{\mu}^{\beta} \phi_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha\beta} - \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'\beta}) \right] = 0 \quad (3.80)$$

$$i g_{\mu} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - m \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - e g_{\mu} \left[\tilde{\Pi}_{\mu}^{\beta} \phi_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta}) \right] = 0 \quad (3.81)$$

$$\square \pi_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} e \left[\sum_{\alpha'=1}^{\nu} \int d^4x (\phi_{\alpha'}^{\dagger} \gamma_0 \gamma_{\mu} \psi_{\alpha'} + \tilde{\psi}_{\alpha'}^{\dagger} \gamma_0 \gamma_{\mu} \phi_{\alpha'}) \right] \quad (3.82)$$

$$\square \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} e \left[\sum_{\alpha'=1}^{\nu} \int d^4x (\phi_{\alpha'}^{\dagger} \gamma_0 \gamma_{\mu} \tilde{\psi}_{\alpha'} + \psi_{\alpha'}^{\dagger} \gamma_0 \gamma_{\mu} \phi_{\alpha'}) \right] \quad (3.83)$$

$$\square \pi_{\mu}^{\alpha\beta} = e \left[\phi_{\alpha}^{\dagger} \gamma_0 \gamma_{\mu} \phi_{\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\beta'=1}^{\kappa} (\psi_{\alpha\beta'}^{\dagger} \gamma_0 \gamma_{\mu} \psi_{\beta'} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta'}^{\dagger} \gamma_0 \gamma_{\mu} \tilde{\psi}_{\beta'}) \chi_{\beta'} \right] \quad (3.84)$$

Es ist notwendig festzustellen, ob die Forderung, daß das elektromagnetische Feld hermitesch ist, mit den Gleichungen (3.79) bis (3.84) verträglich ist. Nach (2.23a) soll sein

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} a_{\alpha} \pi_{\mu}^{\alpha} + \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} \tilde{\pi}_{\mu}^{\alpha} + \sum_{\alpha\beta} : b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta} : \pi_{\mu}^{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} \pi_{\mu}^{*\alpha} + \sum_{\alpha} a_{\alpha} \tilde{\pi}_{\mu}^{*\alpha} + \sum_{\alpha\beta} (: b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta} :)^{\dagger} \pi_{\mu}^{*\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Nach (3.5) ist es aber

$$(: b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta} :)^{\dagger} = : b_{\beta}^{\dagger} b_{\alpha} : \quad (3.86)$$

Die Bedingung (3.85) ist also dann erfüllt, wenn

$$\pi_{\mu}^{\alpha} = \tilde{\pi}_{\mu}^{*\alpha} \quad \text{und} \quad \pi_{\mu}^{\alpha\beta} = \pi_{\mu}^{*\beta\alpha} \quad (3.87)$$

Man prüft leicht nach, daß die Gleichung (3.83) als konjugierte Komplexe zu der Gleichung (3.82) angesehen werden kann und daß die zu (3.84) komplex konjugierte Gleichung mit vertauschten Indizes α und β gerade mit (3.84) identisch ist. Die Bedingungen (3.87) sind also mit (3.79) bis (3.84) verträglich und stellen nach (3.85) die Hermitezität des elektromagnetischen Feldes sicher.

Ein weiterer Punkt, den man diskutieren muß, ist, was mit den Abschneideparametern $N, \mathcal{N}, \nu_i$ tun soll. Diese Größen müssen divergieren. Divergenz von ν_i kann man jedoch nicht zulassen, denn diese Zahlen treten als Faktoren in den Gleichungen (3.79) und (3.84) auf. ν_i müssen also endlich sein. Hingegen darf $N, \mathcal{N} \rightarrow \infty$. Doch werden wir hier auf die folgende interessante Frage geführt: Seien $E, E_1, E_2, \tilde{E}_2, E_\alpha$ zunächst unbestimmte Untermengen der gesamten Menge der Elektronenniveaus, ähnliche Untermengen der gesamten Menge der Photonenniveaus seien $P_1, P_{2\alpha}, \tilde{P}_{2\alpha}$. Die $E, E_1, \tilde{E}_2, E_2, E_\alpha, P_1, P_{2\alpha}, \tilde{P}_{2\alpha}$ sind folgendermaßen definiert: Zur Zeit t sei

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^{(t)} \neq 0 & \text{ nur wenn } \alpha \in E_1, \quad \psi_{\alpha\beta}^{(t)} \neq 0 \text{ wenn } \alpha \in E_2, \beta \in P_{2\alpha} \\ \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{(t)} \neq 0 & \text{ wenn } \alpha \in \tilde{E}_2, \beta \in \tilde{P}_{2\alpha}, \quad \pi_\mu^{\beta(t)} \neq 0 \text{ wenn } \beta \in P_1 \\ \text{und } \prod_\mu^{\alpha\alpha'(t)} \neq 0 & \text{ wenn } \alpha \in E, \alpha' \in E_\alpha \end{aligned} \quad (3.88)$$

Das heißt, in den Gleichungen (3.79) bis (3.84) soll man nur über Elemente der erwähnten Mengen summieren.

Offensichtlich müssen wir für alle α noch fordern

$$\alpha \in E_2 \quad P_{2\alpha} \neq 0, \quad \alpha \in \tilde{E}_2 \quad \tilde{P}_{2\alpha} \neq 0 \quad \text{und} \quad \alpha \in E \quad E_\alpha \neq 0$$

$$\text{wenn } E_2 = 0 \text{ dann auch } P_{2\alpha} = 0 \text{ und analog für } \tilde{E}_2, \text{ etc.} \quad (3.89)$$

Nun wollen wir wissen, welche Bedingungen müssen die Mengen $E, E_1, E_2, \tilde{E}_2, E_\alpha, P_1, P_{2\alpha}, \tilde{P}_{2\alpha}$ erfüllen, daß auch $\phi_\alpha^{(t+\delta t)} \neq 0$ nur wenn $\alpha \in E_1$ usw. für $\psi_{\alpha\beta}^{(t+\delta t)}, \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{(t+\delta t)}, \pi_\mu^{\beta(t+\delta t)}$ und $\prod_\mu^{\alpha\alpha'(t+\delta t)}$?

$$(3.90)$$

Die Untersuchung dieses Problems ist ziemlich langwierig, weil es nur um mathematische Operationen geht. Jedoch führen wir hier diese durch, da wir unter anderem feststellen werden, daß die Annahme, daß die N und $\mathcal{N}$ endlich sind, keine weitere Näherung ist.

Fangen wir mit $\phi_\alpha^{t+\delta t}$ an. Wir suchen solche Bedingungen, daß $\phi_\alpha^{(t+\delta t)} = 0$ wenn $\alpha \notin E_1$ ist. Nach (3.79) ist ein erstes nicht triviales Glied $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{(t)} \pi_\mu^{\beta(t)}$. Dieses Produkt ist nicht Null, wenn $\alpha \in \tilde{E}_2, \beta \in \tilde{P}_{2\alpha}, \beta \in P_1$ (nach (3.88)); zusätzlich muß auch $\alpha \notin E_1$ sein.

Also $\alpha \in \tilde{E}_2, \alpha \notin E_1 \rightarrow \alpha \in \underline{\tilde{E}_2 - E_1 \cap \tilde{E}_2}; \beta \in \tilde{P}_{2\alpha}, \beta \in P_1 \rightarrow \beta \in \underline{P_1 \cap \tilde{P}_{2\alpha}}$.

Das Produkt ist Null, wenn mindestens eine der unterstrichenen Mengen leer ist. Also entweder

$$\tilde{E}_2 = E_1 \cap \tilde{E}_2 \rightarrow \tilde{E}_2 \subseteq E_1 \quad (3.91a)$$

$$\text{oder } P_1 \cap \tilde{P}_{2\alpha} = 0 \text{ für alle } \alpha \in \underline{\tilde{E}_2 - E_1 \cap \tilde{E}_2} \quad (3.91b)$$

Für das Produkt $\psi_{\alpha\beta}^{(t)} \Pi_{\mu}^{*\beta(t)}$ erhalten wir ähnliche Bedingungen entweder $E_2 \subseteq E_1$ (3.92a)

$$\text{oder } P_1 \cap P_{2\alpha} = 0 \text{ für alle } \alpha \in \underline{E_2 - E_1 \cap E_2} \quad (3.92b)$$

Das Produkt $\prod_{\mu}^{\alpha' \alpha'(t)} \phi_{\alpha'}^{(t)}$ ist für $\alpha \notin E_1$ immer Null.

Nun bleibt noch $\prod_{\mu}^{\alpha' \alpha'(t)} \phi_{\alpha'}^{(t)}$

Das Produkt ist nicht Null, wenn $\alpha \notin E_1; \alpha' \in E, \alpha \in E_{\alpha'}, \alpha' \in E_1$,
d. h. $\alpha \in \underline{E_{\alpha'} - E_1 \cap E_{\alpha'}}, \alpha' \in E \cap E_1$.

Dieses Produkt wird dann immer Null, wenn
entweder $E_{\alpha'} \subseteq E_1$ für alle $\alpha' \in E \cap E_1$ (3.93a)

$$\text{oder } E \cap E_1 = 0 \quad (3.93b)$$

Nun betrachten wir $\psi_{\alpha\beta}^{(t+\delta t)}$ (aus der Gleichung (3.80))

Hier ist entweder $\alpha \notin E_2$ oder $\alpha \in E_2$ und $\beta \notin P_{2\alpha}$. Es werden wieder solche Bedingungen gesucht, daß $\psi_{\alpha\beta}^{(t+\delta t)} = 0$ für erwähnte α und β .

Das erste Produkt ist $\Pi_{\mu}^{\beta(t)} \phi_{\alpha}^{(t)}$.

Entweder ist $\alpha \notin E_2$: Dieses Produkt ist nicht Null, wenn

$$\alpha \in E_1, \beta \in P_1 \rightarrow \alpha \in \underline{E_1 - E_1 \cap E_2}, \beta \in P_1$$

Unser Produkt wird identisch Null, wenn
entweder $E_1 \subseteq E_2$ (3.94a)

$$\text{oder } P_1 = 0 \quad (3.94b)$$

oder $\alpha \in E_2, \beta \notin P_{2\alpha}$.

Analog $\alpha \in E_1, \beta \in P_1 \rightarrow \alpha \in E_1 \cap E_2, \beta \in P_1 - P_1 \cap P_{2\alpha}$

Wir erhalten also

$$\text{entweder } E_1 \cap E_2 = 0 \quad (3.95a)$$

$$\text{oder } P_1 \subseteq P_{2\alpha} \text{ für } \alpha \in E_1 \cap E_2 \quad (3.95b)$$

Ein weiteres Produkt $\prod_{\mu}^{\alpha'(\mu)} \psi_{\alpha\beta}^{(\mu)}$ ist wiederum trivial.

Nicht trivial ist $\prod_{\mu}^{\alpha'(\mu)} \psi_{\alpha\beta}^{(\mu)}$. Man fährt analog wie oben fort:

Entweder $\alpha \notin E_2$

dann $\alpha' \in E, \alpha \in E_{\alpha'}, \alpha' \in E_2, \beta \in P_{2\alpha'},$

d. h. $\alpha \in E_{\alpha'} - E_{\alpha'} \cap E_2, \alpha' \in E \cap E_2, \beta \in P_{2\alpha'}$

und wir haben wieder

$$\text{entweder } E_{\alpha'} \subseteq E_2 \text{ für } \alpha' \in E \cap E_2 \quad (3.96a)$$

$$\text{oder } E \cap E_2 = 0 \quad (3.96b)$$

$$\text{oder } P_{2\alpha'} = 0 \text{ für } \alpha' \in E \cap E_2 \quad (3.96c)$$

oder $\alpha \in E_2, \beta \notin P_{2\alpha}$. Dann wieder ähnlich wie oben und $\alpha \in E_{\alpha'} \cap E_2,$
 $\alpha' \in E \cap E_2, \beta \in P_{2\alpha'} - P_{2\alpha'} \cap P_{2\alpha}$

Man erhält also

$$\text{entweder } E_2 \cap E_{\alpha'} = 0 \text{ für } \alpha' \in E \cap E_2 \quad (3.97a)$$

$$\text{oder } E \cap E_2 = 0 \quad (3.97b)$$

$$\text{oder } P_{2\alpha'} \subseteq P_{2\alpha} \text{ für } \alpha' \in E \cap E_2, \alpha \in E_2 \cap E_{\alpha'} \quad (3.97c)$$

Den Fall $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{(t+\delta t)}$ behandelt man ähnlich, so daß

$$\text{entweder } E_1 \subseteq \tilde{E}_2 \quad (3.98a)$$

$$\text{oder } P_1 = 0 \quad (3.98b)$$

$$\text{entweder } E_1 \cap \tilde{E}_2 = 0 \quad (3.99a)$$

$$\text{oder } P_1 \subseteq \tilde{P}_{2\alpha} \text{ für } \alpha \in E_1 \cap \tilde{E}_2 \quad (3.99b)$$

$$\text{entweder } E_{\alpha'} \subseteq \tilde{E}_2 \text{ für } \alpha' \in E \cap \tilde{E}_2 \quad (3.100a)$$

$$\text{oder } E \cap \tilde{E}_2 = 0 \quad (3.100b)$$

$$\text{oder } \tilde{P}_{2\alpha'} = 0 \text{ für } \alpha' \in E \cap \tilde{E}_2 \quad (3.100c)$$

$$\text{entweder } E_{\alpha'} \cap \tilde{E}_2 = 0 \text{ für } \alpha' \in E \cap \tilde{E}_2 \quad (3.101a)$$

$$\text{oder } E \cap \tilde{E}_2 = 0 \quad (3.101b)$$

$$\text{oder } \tilde{P}_{2\alpha'} \subseteq \tilde{P}_{2\alpha} \text{ für } \alpha' \in E \cap \tilde{E}_2 \text{ und } \alpha \in \tilde{E}_2 \cap E_{\alpha'} \quad (3.101c)$$

$\prod_{\mu}^{\beta(t+\delta t)}$ (Gleichung (3.82)) behandeln wir wieder für $\beta \notin P_1$

Das erste Glied $\Phi_{\alpha'}^{+(t')} \psi_{\alpha'\beta}^{(t)}$ ist nicht Null, wenn
 $\alpha' \in E_1, \alpha' \in E_2, \beta \in P_{2\alpha'} \rightarrow \alpha' \in E_1 \cap E_2, \beta \in P_{2\alpha'} - P_1 \cap P_{2\alpha'}$

Man erhält überall Null, wenn

entweder $E_1 \cap E_2 = 0$ (3.102a)

oder $P_{2\alpha'} \subseteq P_1$ für $\alpha' \in E_1 \cap E_2$ (3.102b)

Das zweite Glied liefert ähnliches

entweder $E_1 \cap \tilde{E}_2 = 0$ (3.103a)

oder $P_{2\alpha'} \subseteq P_1$ für $\alpha' \in E_1 \cap \tilde{E}_2$ (3.103b)

Nun haben wir die letzte Gleichung (3.84) für $\prod_{\mu}^{\alpha\beta}(t+\delta t)$

Man hat wieder

entweder $\alpha \notin E$

$\Phi_{\alpha}^{+(t)} \Phi_{\beta}^{(t)} \alpha \in E_1, \beta \in E_1 \rightarrow \alpha \in E_1 - E \cap E_1, \beta \in E_1$ also
 entweder $E_1 \subseteq E$ (3.104a)

oder $E_1 = 0$ (3.104b)

$\psi_{\alpha\beta}^{+(t)} \psi_{\alpha'\beta'}^{(t)} \alpha \in E_2, \beta' \in P_{2\alpha}, \beta \in E_2, \beta' \in P_{2\beta}$

oder $\alpha \in E_2 - E_2 \cap E, \beta \in E_2, \beta' \in P_{2\alpha} \cap P_{2\beta}$

Man erhält überall Null, wenn

entweder $E_2 \subseteq E$ (3.105a)

oder $E_2 = 0$ (3.105b)

oder $P_{2\alpha} \cap P_{2\beta} = 0$ für $\alpha \in E_2 - E_2 \cap E, \beta \in E_2$ (3.105c)

und

$\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{(t)} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta'}^{(t)}$ entweder $\tilde{E}_2 \subseteq E$ (3.106a)

oder $\tilde{E}_2 = 0$ (3.106b)

oder $P_{2\alpha} \cap \tilde{P}_{2\beta} = 0$ für $\alpha \in \tilde{E}_2 - \tilde{E}_2 \cap E, \beta \in \tilde{E}_2$ (3.106c)

oder kann es sein $\alpha \in E, \beta \notin E_{\alpha}$

$\Phi_{\alpha}^{+(t)} \Phi_{\beta}^{(t)}$ das Produkt ist nicht Null, wenn

$\alpha \in E_1, \beta \in E_1 \rightarrow \alpha \in E \cap E_1, \beta \in E_1 - E_1 \cap E_{\alpha}$

Es wird identisch Null, falls

entweder $E \cap E_1 = 0$ (3.107a)

oder $E_1 \subseteq E_{\alpha}$ für $\alpha \in E \cap E_1$ (3.107b)

$\psi_{\alpha\beta}^{+(t)} \psi_{\beta\beta'}^{(t)}$ dieses Glied ist wieder nicht Null, falls
 $\alpha \in E_2, \beta' \in P_{2\alpha}, \beta \in E_2, \beta' \in P_{2\beta}$, woraus ergibt sich
 $\alpha \in E \cap E_2, \beta \in E_2 - E_2 \cap E_\alpha, \beta' \in P_{2\alpha} \cap P_{2\beta}$,
 jedoch wird es identisch Null, wenn

$$\text{entweder } E \cap E_2 = 0 \quad (3.108a)$$

$$\text{oder } E_2 \subseteq E_\alpha \text{ für } \alpha \in E \cap E_2 \quad (3.108b)$$

$$\text{oder } P_{2\alpha} \cap P_{2\beta} = 0 \text{ für } \alpha \in E \cap E_2, \beta \in E_2 - E_2 \cap E_\alpha \quad (3.108c)$$

Schließlich hat man noch

$\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{+(t)} \tilde{\psi}_{\beta\beta'}^{(t)}$ dies ist vollständig analog dem vorangehenden Fall.

Es ist

$$\text{entweder } E \cap \tilde{E}_2 = 0 \quad (3.109a)$$

$$\text{oder } \tilde{E}_2 \subseteq E_\alpha \text{ für } \alpha \in E \cap \tilde{E}_2 \quad (3.109b)$$

$$\text{oder } \tilde{P}_{2\alpha} \cap \tilde{P}_{2\beta} = 0 \text{ für } \alpha \in E \cap \tilde{E}_2, \beta \in \tilde{E}_2 - \tilde{E}_2 \cap E_\alpha \quad (3.109c)$$

Diese Bedingungen ((3.91) bis (3.109)) müssen folgendermaßen erfüllt werden: Bedingungen mit den unterschiedlichen laufenden Nummern müssen gleichzeitig und die mit den unterschiedlichen Buchstaben alternativ gelten.

Wir wissen, daß entweder $E \cap E_1 = 0$ oder $E \cap E_1 \neq 0, E \cap E_2 = 0$
 oder $E \cap E_2 \neq 0, E \cap \tilde{E}_2 = 0$ oder $E \cap \tilde{E}_2 \neq 0$.

Diskutieren wir zunächst, daß der Schnitt der Mengen eine leere Menge ist:

$$E \cap E_1 = 0 \quad \text{Es sei zunächst } E_1 \neq 0. \text{ Dann nach (3.104)}$$

$$E_1 \subseteq E \text{ (3.104a)} \rightarrow E_1 \cap E = E_1 (\neq 0) \text{ und das ist ein Widerspruch.}$$

Man erhält also:

$$\text{aus } E_1 \cap E = 0 \text{ folgt, daß } E_1 = 0 \quad (3.110)$$

Sei nun $E \cap E_2 = 0$ und weiter nehmen wir an, daß $E_2 \neq 0$. Dann

$$(3.105a) \text{ gilt nicht und deswegen ist } P_{2\alpha} \cap P_{2\beta} = 0 \text{ (3.105c)}$$

für $\alpha, \beta \in E_2$. Wenn wir $\alpha = \beta \in E_2$ wählen, erhalten wir

$$P_{2\alpha} \cap P_{2\alpha} = 0 \Rightarrow P_{2\alpha} = 0 \text{ für jedes } \alpha \in E_2$$

Nach (3.89) ist jedoch, wenn $E_2 \neq 0$ dann auch $P_{2\alpha} \neq 0$, was wieder ein

Widerspruch bedeutet.

Wir haben also:

$$\text{aus } E \cap E_2 = 0 \text{ folgt, da\ss } E_2 = 0 (= P_{2\alpha}) \quad (3.111)$$

Analog erhält man, da\ss

$$\text{aus } E \cap \widetilde{E}_2 = 0 \text{ folgt, da\ss } \widetilde{E}_2 = 0 (= \widetilde{P}_{2\alpha}) \quad (3.112)$$

Behandeln wir nun den 2. Fall, wenn der Schnitt der Mengen nicht leer ist. Also

$$\underline{E \cap E_1 \neq 0} \quad E \neq 0, E_1 \neq 0 \text{ und nach (3.107) folglich } E_1 \subseteq E_\alpha \\ \text{f\ddot{u}r } \alpha \in E \cap E_1.$$

Weil (3.104b) nicht gilt, ist es gleichzeitig $E_1 \subseteq E$ (3.104a).

Weiter ist (3.93b) nicht erf\ddot{u}llt, mu\ss also $E_{\alpha'} \subseteq E_1$ f\ddot{u}r $\alpha' \in E_1$ sein

(3.93a). Insgesamt ist $E_1 = E_\alpha$, $E_1 \subseteq E$ f\ddot{u}r $\alpha \in E_1$. Man nehme an, da\ss

$E_1 \subset E$, dann auch $E_\alpha \subset E$ und beide Mengen sind nicht leer. Wählen wir

$\alpha \in E_\alpha$, $\alpha' \in E - E_\alpha \neq 0$. Dann m\ddot{u}\ss te $\prod_{\mu}^{\alpha\alpha'}(t) = 0$ sein

Dann aber m\ddot{u}\ss te auch $[\prod_{\mu}^{\alpha\alpha'}(t)]^* = 0 = \prod_{\mu}^{\alpha\alpha'}(t)$.

Es ist zwar $\alpha' \in E - E_\alpha \subset E$, jedoch $\alpha \in E_\alpha$, was bedeutet, da\ss

$$\prod_{\mu}^{\alpha\alpha'}(t) \neq 0. \text{ Es mu\ss also } E_1 = E \text{ sein.}$$

Das hei\ss t also, da\ss

$$\text{aus } E \cap E_1 \neq 0$$

$$E, E_1 \neq 0, E = E_1 = E_\alpha \text{ f\ddot{u}r } \alpha \in E_1 \text{ folgt} \quad (3.113)$$

Analog diskutieren wir den Fall $E \cap E_2 \neq 0$.

Zunächst $E, E_2 \neq 0$. Aus (3.108) folgt, da\ss entweder $E_2 \not\subseteq E$ oder

$E_2 \subseteq E$ ist. Wenn $E_2 \not\subseteq E$ ist, dann mu\ss (3.105c) gelten: $P_{2\alpha} \cap P_{2\beta} = 0$

f\ddot{u}r $\alpha \in E_2 - E_2 \cap E$ und $\beta \in E_2$. Wieder, wenn $\alpha \in E_2$ und $\alpha \in E_2 - E_2 \cap E$ ist,

dann ist $P_{2\alpha} \cap P_{2\alpha} = 0 \rightarrow P_{2\alpha} = 0$, was widerspricht der Bedingung

$E_2 \neq 0$ (3.89). Es mu\ss also $E_2 \subseteq E$ sein. Nehmen wir weiter an, da\ss

$E_2 \not\subseteq E_\alpha$ ist. Dann mu\ss nach (3.108) $P_{2\alpha} \cap P_{2\beta} = 0$ (3.108c) f\ddot{u}r

$\alpha \in E \cap E_2 = E_2$ und $\beta \in E_2 - E_2 \cap E_\alpha$. Wieder wählen wir solch ein

$\alpha \in E_2 - E_2 \cap E_\alpha$ und $P_{2\alpha} \cap P_{2\alpha} = 0 \rightarrow P_{2\alpha} = 0$ widerspricht wieder der

Bedingung $E_2 \neq 0$. Es mu\ss also $E_2 \subseteq E_\alpha$ sein. Nun haben wir $E_2 \subseteq E$

und $E_2 \subseteq E_\alpha$. Es ist weder $E \cap E_2 = 0$ noch $P_{2\alpha} = 0$ f\ddot{u}r $\alpha \in E_2$ und des-

wegen ist es nach (3.96) $E_{\alpha'} \subseteq E_2$ f\ddot{u}r $\alpha' \in E_2$ (3.96a)

Nach (3.97) ist also $P_{2\alpha'} \subseteq P_{2\alpha}$ (3.97c) f\ddot{u}r $\alpha' \in E_2, \alpha \in E_2$.

Wenn wir die Indizes α, α' umtauschen, mu\ss wieder $P_{2\alpha} \subseteq P_{2\alpha'}$ sein.

Also ist $P_{2\alpha} = P_{2\alpha'}$ f\ddot{u}r $\alpha, \alpha' \in E_2$. Weil ähnlich $E_\alpha = E_2$, kann man

dieselbe Überlegung wie fr\ddot{u}her durchf\ddot{u}hren, so da\ss $E_\alpha = E$ ist.

Insgesamt also

aus $E \cap E_2 \neq 0$ folgt

$$E = E_2 = E_\alpha \ (\neq 0), \quad P_{2\alpha'} = P_{2\alpha} \text{ für } \alpha, \alpha' \in E_2 \quad (3.114)$$

ähnlich findet man, daß

aus $E \cap \tilde{E}_2 \neq 0$

$$E = \tilde{E}_2 = \tilde{E}_\alpha \ (\neq 0), \quad \tilde{P}_{2\alpha'} = \tilde{P}_{2\alpha} \text{ für } \alpha, \alpha' \in \tilde{E}_2 \text{ folgt.} \quad (3.115)$$

Diese 6 Ausdrücke (3.110) bis (3.115) können nun auf 8 verschiedene Weisen untereinander kombiniert werden, um eine vollständige Antwort auf die ursprüngliche Frage zu erhalten:

$$\begin{aligned} E \cap E_1 = E \cap E_2 = E \cap \tilde{E}_2 = 0 &\rightarrow E_1 = E_2 = \tilde{E}_2 = 0 \\ \text{und also auch } P_{2\alpha} = \tilde{P}_{2\alpha} = 0 &\quad (3.116a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \cap E_1 \neq 0, E \cap E_2 = E \cap \tilde{E}_2 = 0 &\rightarrow E = E_1 = E_\alpha \ (\neq 0), \tilde{E}_2 = 0 = E_2 \\ \text{und folglich } P_{2\alpha} = \tilde{P}_{2\alpha} = 0 &; \text{ wegen (3.94) ist auch noch } P_1 = 0, \alpha \in E_1 \quad (3.116b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \cap E_1 = 0, E \cap E_2 \neq 0, E \cap \tilde{E}_2 = 0 &\rightarrow E_1 = 0, E = E_2 = E_\alpha \ (\neq 0) \\ P_{2\alpha} = P_{2\alpha'}; E_2 = 0 \text{ für } \alpha \in E_2; &\text{ weil (3.92a) nicht erfüllt ist, muß} \\ P_1 \cap P_{2\alpha} = 0 \text{ sein.} &\quad (3.116c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \cap E_1 \neq 0, E \cap E_2 \neq 0, E \cap \tilde{E}_2 = 0 &\rightarrow E = E_1 = E_2 = E_\alpha \ (\neq 0), \\ P_{2\alpha'} = P_{2\alpha}, E_2 = 0 & \\ \text{Die Bedingung (3.95) führt auf } P_1 \subseteq P_{2\alpha}, &\text{ wenn } \alpha \in E_1. \text{ Weiter aus} \\ \text{(3.98) haben wir, daß } P_1 = 0 \text{ ist. Um (3.102) zu erfüllen, muß} & \\ P_{2\alpha} \subseteq P_1 \ (\alpha \in E_1) \text{ sein. Wir erhalten also } P_1 = P_{2\alpha} = 0, &\text{ was wieder der} \\ \text{Forderung (3.89) widerspricht. Dieser Fall realisiert sich also nicht.} & \quad (3.116d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \cap E_1 = E \cap E_2 = 0, E \cap \tilde{E}_2 \neq 0 &\rightarrow E_1 = E_2 = 0, E = E_\alpha = \tilde{E}_2, \ (\neq 0), \\ \tilde{P}_{2\alpha'} = \tilde{P}_{2\alpha}. \text{ Aus (3.91) folgern wir wieder, daß } &P_1 \cap \tilde{P}_{2\alpha} = 0 \quad (3.116e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Der Fall } E \cap E_1 \neq 0, E \cap E_2 = 0, E \cap \tilde{E}_2 \neq 0 &\text{ realisiert sich wieder} \\ \text{nicht (Die Argumentation ist dieselbe wie in (3.116d)).} & \quad (3.116f) \end{aligned}$$

$$\underline{E \cap E_1 = 0, E \cap E_2 \neq 0, E \cap \tilde{E}_2 \neq 0 \rightarrow E_1 = 0, E = E_2 = \tilde{E}_2 = E_\alpha (\neq 0)}$$

$$P_{2\alpha'} = P_{2\alpha}, \tilde{P}_{2\alpha'} = \tilde{P}_{2\alpha} \text{ für } \alpha, \alpha' \in E_2;$$

aus (3.91) ergibt sich, daß $P_1 \cap \tilde{P}_{2\alpha} = 0$ für $\alpha \in E_2$ und analog aus

(3.92) schließen wir, daß $P_1 \cap P_{2\alpha} = 0$

(3.116g)

Schließlich haben wir noch den letzten Fall zu betrachten:

$$\underline{E \cap E_1 \neq 0, E \cap E_2 \neq 0, E \cap \tilde{E}_2 \neq 0 \rightarrow E = E_1 = E_2 = \tilde{E}_2 = E_\alpha (\neq 0)}$$

$$P_{2\alpha'} = P_{2\alpha}, \tilde{P}_{2\alpha'} = \tilde{P}_{2\alpha}$$

Aus (3.95) erhalten wir, daß

$$P_1 \subseteq P_{2\alpha} \text{ für } \alpha \in E_1$$

analog aus (3.99)

$$P_1 \subseteq \tilde{P}_{2\alpha}$$

(3.103) liefert wiederum

$$\tilde{P}_{2\alpha} \subseteq P_1$$

und (3.102) ergibt

$$P_{2\alpha} \subseteq P_1$$

Also insgesamt $P_1 = P_{2\alpha} = \tilde{P}_{2\alpha}$

(3.116h)

Die Beziehungen (3.116a-h) stellen eine positive Antwort auf unsere Frage dar, ob aus (3.88) die Relationen (3.90) folgen. Jetzt möchten wir nur noch feststellen, in welcher Beziehung diese Bedingungen zu den Gleichungen (3.79) bis (3.84) stehen. Die erste Bedingung (3.116a) besagt, daß aus (3.79) bis (3.84) nur (3.82) und die letzte bleiben, wobei in (3.82) und (3.84) rechts Null stehen. Aus der zweiten Bedingung (3.116b) erhalten wir, daß nur (3.79) und (3.84) nicht trivial sind (die anderen sind vom Typ $0 = 0$), wobei $\psi_{\alpha\beta} = \tilde{\psi}_{\alpha\beta} = 0$ einzusetzen ist. Das sind gerade die relativistischen Hartree - Fock Gleichungen⁽¹⁾.

(3.116c) führt wiederum auf (3.80), (3.82) (und trivialerweise auch auf (3.83)) und (3.84), wobei ϕ_α und $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$ Null einzusetzen ist. (3.116e)

führt auf ähnliches Ergebnis, wobei man $\psi_{\alpha\beta}$ durch $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$ und umgekehrt vertauscht. Die vorletzte Bedingung (3.116g) führt auf (3.80) bis (3.84), wobei $\phi_\alpha = 0$ ist. Index β in $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$ kann eine andere Menge verlaufen als

β in $\psi_{\alpha\beta}$. Die letzte Summe in (3.84) soll also für $\beta' = 1, \dots, \kappa'$ durchgeführt werden! (Die Menge $(1, \dots, \kappa')$ kann eine ganz andere sein als die $(1, \dots, \kappa)$!) Die Letzte Bedingung führt offenbar gerade zum

gesamten System (3.79) bis (3.84). Wir schließen diesen Abschnitt mit der Feststellung, daß alle Systeme von Differentialgleichungen, die (3.88) und (3.90) erfüllen, im System (3.79) bis (3.84) enthalten sind (siehe Bemerkung über κ' !) und folglich beschreiben sie die Entwicklung aller

genauen Zustände (im Sinne dieser Theorie).

Am Anfang des zweiten Abschnitts haben wir gesagt, daß die Bedingungen der Lorentz Eichung (2.4a) und (2.7) nur zu einem Zeitpunkt erfüllt sein müssen, um für jede spätere Zeit sichergestellt zu werden (in der genauen Theorie). Hier, wie versprochen, müssen solche Bedingungen gefunden werden, die ähnliche Eigenschaften (in unserer Theorie) wie die Bedingung der Lorentz - Eichung haben, wobei wir einige Ergebnisse des 4. Abschnitts benutzen werden. Betrachten wir die Gleichung (3.84) für $\alpha = \beta$. Wenn wir diese Gleichung mit $S_{\alpha F}$ multiplizieren und über α aufsummieren, erhalten wir

$$\square \left(\sum_{\alpha=1}^N \prod_{\mu}^{\alpha\alpha} S_{\alpha F} \right) = e \left(\sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}^+ \delta_0 \gamma_{\mu} \phi_{\alpha} S_{\alpha F} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N [\psi_{\alpha\beta}^+ \delta_0 \gamma_{\mu} \psi_{\alpha\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \delta_0 \gamma_{\mu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}] S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \right) \quad (3.117)$$

wobei auf der rechten Seite der Ausdruck für den Strom z_{μ} (4.12) steht. Das ergibt also

$$\square \left(\partial_{\mu} \sum_{\alpha=1}^N \prod_{\mu}^{\alpha\alpha} S_{\alpha F} \right) = 0 \quad (3.118)$$

wobei $\partial_{\mu} \equiv \partial / \partial x_{\mu}$ ist. Analog der Theorie des elektromagnetischen Feldes können wir postulieren

$$\partial_{\mu} \sum_{\alpha=1}^N \prod_{\mu}^{\alpha\alpha} S_{\alpha F} = 0 \quad (3.119)$$

denn diese Bedingung hat dieselbe Wirkung auf unsere Theorie wie die Bedingung der Lorentz - Eichung (2.4a) auf die genaue Theorie: sie versichert die Stromerhaltung auf dieselbe Weise wie die Maxwell - Gleichungen das tun. Weil wir die Bedingung (3.119) kennen, sind wir imstande, unsere Theorie eichinvariant zu formulieren, was verlangt, diese einigermaßen zu verändern. Wir führen folgende Größen ein

$$\sum_{\alpha=1}^N \prod_{\mu}^{\alpha\alpha} S_{\alpha F} = \prod_{\mu}^{(N)} \quad (3.120)$$

Mit Hilfe von dieser neuen Funktion stellen wir ein neues System von Differenzialgleichungen auf

$$i g^{\mu} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - m \phi_{\alpha} - \frac{1}{2} e g^{\mu} \left[\sum_{\beta=1}^{\kappa} (\tilde{\psi}_{\alpha\beta} \Pi_{\mu}^{\beta} + \psi_{\alpha\beta} \Pi_{\mu}^{*\beta}) \psi_{\beta} \right. \\ \left. + \Pi_{\mu}^{(N)} \phi_{\alpha} - \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} \Pi_{\mu}^{\alpha'} \phi_{\alpha'} \right] = 0 \quad (3.121)$$

$$i g^{\mu} \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - m \psi_{\alpha\beta} - e g^{\mu} \left[\phi_{\alpha} \Pi_{\mu}^{\beta} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Pi_{\mu}^{(N)} \psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} \Pi_{\mu}^{\alpha'} \psi_{\alpha'\beta} \right] = 0 \quad (3.122)$$

$$i g^{\mu} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - m \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - e g^{\mu} \left[\phi_{\alpha} \Pi_{\mu}^{*\beta} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Pi_{\mu}^{(N)} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} \Pi_{\mu}^{\alpha'} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta} \right] = 0 \quad (3.123)$$

$$\square \Pi_{\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} e \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\phi_{\alpha'}^+ \delta_{\alpha'\mu} \psi_{\alpha'\alpha} + \tilde{\psi}_{\alpha'\alpha}^+ \delta_{\alpha'\mu} \phi_{\alpha'}) \quad (3.124)$$

$$\square \Pi_{\mu}^{\alpha\beta} = e \left[\phi_{\alpha}^+ \delta_{\alpha\mu} \phi_{\beta} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\beta'=1}^{\kappa} (\psi_{\alpha\beta'}^+ \delta_{\alpha\mu} \psi_{\beta'\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta'}^+ \delta_{\alpha\mu} \tilde{\psi}_{\beta'\beta}) \psi_{\beta'} \right] \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \Pi_{\mu}^{(N)}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Pi_{\nu}^{(N)}}{\partial x^{\mu}} \right) = e \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \left[\phi_{\alpha}^+ \delta_{\alpha\mu} \phi_{\alpha} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{\kappa} (\psi_{\alpha\beta}^+ \delta_{\alpha\mu} \psi_{\alpha\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \delta_{\alpha\mu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}) \psi_{\beta} \right] \quad (3.126)$$

Um die Konsistenz dieser Gleichungen mit (3.79) bis (3.84) zu beweisen, finden wir zuerst solche Eichtransformationen, die die Gleichungen (3.121) bis (3.126) unverändert lassen und dann zeigen wir, mit welcher Wahl der Eichung unsere neuen Gleichungen in die (3.79) bis (3.84) übergehen. Wir schlagen zunächst vor, daß

$$\phi_{\alpha} = \phi'_{\alpha} e^{i \Lambda_{\alpha}}, \quad \psi_{\alpha\beta} = \psi'_{\alpha\beta} e^{i \Lambda_{\alpha\beta}} \\ \tilde{\psi}_{\alpha\beta} = \tilde{\psi}'_{\alpha\beta} e^{i \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}} \quad (3.127)$$

sind. Aus den Gleichungen (3.121), (3.122) und (3.123) folgern wir eindeutig, daß

$$\Pi_{\mu}^{\beta} = \Pi_{\mu}^{\beta} e^{i(\Lambda_{\alpha} - \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta})}, \quad \Lambda_{\alpha\beta} + \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = 2\Lambda_{\alpha}$$

und

$$\Pi_{\mu}^{\alpha'\alpha} = \Pi_{\mu}^{\alpha'\alpha} e^{i(\Lambda_{\alpha} - \Lambda_{\alpha'})} \quad (3.128)$$

(die zweite Gleichung folgt aus dem Glied $\psi_{\alpha\beta} \Pi_{\mu}^{\alpha\beta}$).

Man bekommt nur noch eine neue Bedingung, und zwar aus dem Glied

$$\Pi_{\mu}^{\alpha'\alpha} \psi_{\alpha\beta}. \text{ Diese lautet}$$

$$\Lambda_{\alpha'\beta} + \Lambda_{\alpha} - \Lambda_{\alpha'} = \Lambda_{\alpha\beta} \quad (3.129)$$

Wegen der Ableitungen in (3.121), (3.122) und (3.123) erhält man zusätzlich, wie üblich, die Glieder $-g^{\mu} \phi'_{\alpha} \partial^{\mu} \Lambda_{\alpha} e^{i\Lambda_{\alpha}}$, $-g^{\mu} \psi'_{\alpha\beta} \partial^{\mu} \Lambda_{\alpha\beta} e^{i\Lambda_{\alpha\beta}}$ und $-g^{\mu} \tilde{\psi}'_{\alpha\beta} \partial^{\mu} \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} e^{i\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}}$. Man muß also fordern, daß

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu}^{(N)} &= \Pi_{\mu}^{(N)} - \frac{2}{e} \partial^{\mu} \Lambda_{\alpha} = \Pi_{\mu}^{(N)} - \frac{2}{e} \partial^{\mu} \Lambda_{\alpha\beta} \\ &= \Pi_{\mu}^{(N)} - \frac{2}{e} \partial^{\mu} \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.130)$$

sind und also

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha} + c_{\alpha\beta} \quad \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha} + \tilde{c}_{\alpha\beta} \quad (3.131)$$

Wegen (3.129) ist es aber

$$c_{\alpha\beta} = c_{\alpha'\beta} = c_{\beta} \quad (3.132a)$$

und analog wegen der zweiten Gleichung in (3.128)

$$\tilde{c}_{\alpha\beta} = \tilde{c}_{\alpha'\beta} = \tilde{c}_{\beta} = -c_{\beta} \quad (3.132b)$$

Alle unsere bisherigen Bedingungen sind identisch erfüllt und wir haben

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha} &= \phi'_{\alpha} e^{i\Lambda_{\alpha}}, \quad \psi_{\alpha\beta} = \psi'_{\alpha\beta} e^{i(\Lambda_{\alpha} + c_{\beta})}, \quad \tilde{\psi}_{\alpha\beta} = \tilde{\psi}'_{\alpha\beta} e^{i(\Lambda_{\alpha} - c_{\beta})} \\ \Pi_{\mu}^{\beta} &= \Pi_{\mu}^{\beta} e^{ic_{\beta}}, \quad \Pi_{\mu}^{\alpha'\alpha} = \Pi_{\mu}^{\alpha'\alpha} e^{i(\Lambda_{\alpha} - \Lambda_{\alpha'})} \end{aligned} \quad (3.133)$$

Soll die Gleichung (3.125) unverändert bleiben, muß $\Lambda_\alpha - \Lambda'_\alpha$ eine beliebige Konstante sein, und wir erhalten diese Transformationen

$$\begin{aligned}\phi_\alpha &= \phi'_\alpha e^{i(1+c_\alpha)}, \quad \psi_{\alpha\beta} = \psi'_{\alpha\beta} e^{i(1+c_\alpha+c_\beta)} \\ \tilde{\psi}_{\alpha\beta} &= \tilde{\psi}'_{\alpha\beta} e^{i(1+c_\alpha-c_\beta)} \quad \text{und} \quad \pi_\mu^\beta = \pi'_\mu{}^\beta e^{i c_\beta} \\ \pi_\mu^{\alpha\alpha} &= \pi'_\mu{}^{\alpha\alpha} e^{i(c_\alpha-c_{\alpha'})}, \quad \pi_\mu^{(N)} = \pi'_\mu{}^{(N)} - \frac{2}{e} \sigma^\mu \Lambda\end{aligned} \quad (3.134)$$

wobei Λ eine beliebige reelle Funktion und c_α, c_β reelle Zahlen sind, die die Gleichungen (3.121) bis (3.126) invariant lassen. Nehmen wir einmal an, es sei kein äußeres freies elektromagnetisches Feld vorhanden. Dann kann man bestimmt solch ein Λ finden, daß

$$\partial_\mu \pi_\mu^{(N)} = 0 \quad (3.135)$$

ist. Aus den Gleichungen (3.124) und (3.125) erhalten wir sofort

$$\square \left(\pi_\mu^{(N)} - \sum_{\alpha=1}^N \pi_\mu^{\alpha\alpha} S_{\alpha F} \right) = 0 \quad (3.136)$$

Falls wir den Ausdruck, der in Klammern steht, mit $2A_\mu$ bezeichnen, kann A_μ als Viererpotential für ein freies äußeres elektromagnetisches Feld interpretiert werden. Weil bei dessen Abwesenheit $A_\mu = 0$ ist, ist also

$$\pi_\mu^{(N)} = \sum_{\alpha=1}^N \pi_\mu^{\alpha\alpha} S_{\alpha F} \quad (3.137)$$

Dieses eingesetzt in (3.121) bis (3.123) ergibt gerade das ursprüngliche System von Differentialgleichungen (3.79) bis (3.84), was zu beweisen war. Die weitere Entwicklung der Theorie basiert jedoch auf den Gleichungen (3.79) bis (3.84). Die Verallgemeinerung der Ausdrücke im Abschnitt 4 ist leicht durchzuführen.

4. Die Erhaltungsgrößen

Ein quantenmechanischer Zustand ist eindeutig durch die Erhaltungsgrößen (Ladung, Energie, Impuls, Drehimpuls) beschrieben. Es ist also von fundamentaler Wichtigkeit, entsprechende Ausdrücke für diese Größen in unserer Theorie zu finden. Zunächst werden wir versuchen, einen Ausdruck für den Strom zu finden. Als Richtschnur kann die Diracsche Theorie (2) dienen. Man geht folgendermaßen vor: Zuerst multiplizieren wir die Gleichung (3.79) von links mit $\phi_\alpha^+ \gamma^0$ (wir bezeichnen $i \gamma^\mu \partial_\mu - m = 0$)

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^+ \gamma^0 D \phi_\alpha &= e \frac{1}{2} \phi_\alpha^+ \gamma^0 \gamma^\mu \left[\sum_{\beta=1}^{\kappa} (\tilde{\psi}_{\alpha\beta} \pi_\mu^\beta + \pi_\mu^{*\beta} \psi_{\alpha\beta}) \nu_\beta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\pi_\mu^{\alpha\alpha'} \phi_\alpha - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \phi_{\alpha'}) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Zum zweiten sei die Gleichung wieder von links mit γ^0 multipliziert, dann komplex konjugiert und von rechts mit ϕ_α multipliziert

$$\begin{aligned} (\gamma^0 D \phi_\alpha)^+ \phi_\alpha &= e \frac{1}{2} \left[\sum_{\beta=1}^{\kappa} (\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \pi_\mu^{*\beta} + \pi_\mu^\beta \psi_{\alpha\beta}^+) \nu_\beta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\pi_\mu^{\alpha\alpha'} \phi_\alpha^+ - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \phi_{\alpha'}^+) \right] \gamma^0 \gamma^\mu \phi_\alpha \end{aligned} \quad (4.2)$$

Hierbei haben wir (3.87) benutzt. Un bilden wir

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \phi_\alpha^+ \gamma^0 D \phi_\alpha S_{\alpha F} - \sum_{\alpha=1}^N (\gamma^0 D \phi_\alpha)^+ \phi_\alpha S_{\alpha F} \\ = e \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\kappa} S_{\alpha F} \pi_\mu^\beta [\phi_\alpha^+ \gamma^0 \gamma^\mu \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^\mu \phi_\alpha] \nu_\beta \\ + e \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\kappa} S_{\alpha F} \pi_\mu^{*\beta} [\phi_\alpha^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi_{\alpha\beta} - \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^\mu \phi_\alpha] \nu_\beta \end{aligned} \quad (4.3)$$

denn die Summen über α' in (4.1) und (4.2) fallen weg. Dasselbe führt man mit $\psi_{\alpha\beta}$ und $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$ durch. Man bekommt

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 D \psi_{\alpha\beta} &= e [\psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^\mu \phi_\alpha \pi_\mu^\beta \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\pi_\mu^{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi_{\alpha\beta} - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi_{\alpha'\beta})] \end{aligned} \quad (4.4)$$

4. Die Erhaltungsgrößen

Ein quantenmechanischer Zustand ist eindeutig durch die Erhaltungsgrößen (Ladung, Energie, Impuls, Drehimpuls) beschrieben. Es ist also von fundamentaler Wichtigkeit, entsprechende Ausdrücke für diese Größen in unserer Theorie zu finden. Zunächst werden wir versuchen, einen Ausdruck für den Strom zu finden. Als Richtschnur kann die Diracsche Theorie (2) dienen. Man geht folgendermaßen vor: Zuerst multiplizieren wir die Gleichung (3.79) von links mit $\phi_\alpha^+ \gamma^0$ (wir bezeichnen $i \gamma^\mu \partial_\mu - m = 0$)

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^+ \gamma^0 D \phi_\alpha &= e \frac{1}{2} \phi_\alpha^+ \gamma^0 \gamma^\mu \left[\sum_{\beta=1}^N (\tilde{\psi}_{\alpha\beta} \pi_\mu^\beta + \pi_\mu^{*\beta} \psi_{\alpha\beta}) \gamma_\beta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha\alpha'} F (\pi_\mu^{\alpha\alpha'} \phi_\alpha - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \phi_{\alpha'}) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Zum zweiten sei die Gleichung wieder von links mit γ^0 multipliziert, dann komplex konjugiert und von rechts mit ϕ_α multipliziert

$$\begin{aligned} (\gamma^0 D \phi_\alpha)^+ \phi_\alpha &= e \frac{1}{2} \left[\sum_{\beta=1}^N (\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \pi_\mu^{*\beta} + \pi_\mu^\beta \psi_{\alpha\beta}^+) \gamma_\beta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha\alpha'} F (\pi_\mu^{\alpha\alpha'} \phi_\alpha^+ - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \phi_{\alpha'}^+) \right] \gamma^0 \gamma^\mu \phi_\alpha \end{aligned} \quad (4.2)$$

Hierbei haben wir (3.87) benutzt. Um bilden wir

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \phi_\alpha^+ \gamma^0 D \phi_\alpha S_{\alpha F} &- \sum_{\alpha=1}^N (\gamma^0 D \phi_\alpha)^+ \phi_\alpha S_{\alpha F} \\ &= e \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N S_{\alpha F} \pi_\mu^\beta [\phi_\alpha^+ \gamma^0 \gamma^\mu \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^\mu \phi_\alpha] \gamma_\beta \\ &\quad + e \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N S_{\alpha F} \pi_\mu^{*\beta} [\phi_\alpha^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi_{\alpha\beta} - \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^\mu \phi_\alpha] \gamma_\beta \end{aligned} \quad (4.3)$$

denn die Summen über α' in (4.1) und (4.2) fallen weg. Dasselbe führt man mit $\psi_{\alpha\beta}$ und $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$ durch. Man bekommt

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 D \psi_{\alpha\beta} &= e [\psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^\mu \phi_\alpha \pi_\mu^\beta \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha\alpha'} F (\pi_\mu^{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi_{\alpha\beta} - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi_{\alpha'\beta})] \end{aligned} \quad (4.4)$$

und

$$(\gamma^0 D \psi_{\alpha\beta})^+ \psi_{\alpha\beta} = e \left[\pi_{\mu}^{*\beta} \phi_{\alpha}^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha F} \left(\prod_{\mu}^{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi_{\alpha\beta} - \prod_{\mu}^{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi_{\alpha\beta} \right) \right] \quad (4.5)$$

Beide Gleichungen (4.4) und (4.5) multiplizieren wir mit $\frac{1}{2} S_{\alpha F} \gamma_{\beta}$ und summieren über α und β .

Also

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 D \psi_{\alpha\beta} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N (\gamma^0 D \psi_{\alpha\beta})^+ \psi_{\alpha\beta} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \\ &= \frac{e}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \left(\psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \phi_{\alpha} \pi_{\mu}^{\beta} - \phi_{\alpha}^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi_{\alpha\beta} \pi_{\mu}^{*\beta} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die erwähnten Summen fallen wieder aus. Analog stellt man fest, daß

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \left[\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 D \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - (\gamma^0 D \tilde{\psi}_{\alpha\beta})^+ \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \right] \\ &= \frac{e}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \left[\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \phi_{\alpha} \pi_{\mu}^{*\beta} - \phi_{\alpha}^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \pi_{\mu}^{\beta} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Offensichtlich ist auch

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}^+ \gamma^0 D \phi_{\alpha} S_{\alpha F} - \sum_{\alpha=1}^N (\gamma^0 D \phi_{\alpha})^+ \phi_{\alpha} S_{\alpha F} \\ &= i \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \left(\sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \phi_{\alpha} S_{\alpha F} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

richtig und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \left[\psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 D \psi_{\alpha\beta} - (\gamma^0 D \psi_{\alpha\beta})^+ \psi_{\alpha\beta} \right] \\ &= i \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \psi_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi_{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \left[\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 D \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - (\gamma^0 D \tilde{\psi}_{\alpha\beta})^+ \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \right] \\ &= i \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \gamma^0 \gamma^{\mu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Summieren wir alle drei Gleichungen (4.8), (4.9) und (4.10), so bedeutet das, daß wir auch die rechten Seiten der Gleichungen (4.3), (4.6) und (4.7) zu summieren haben. Das gibt insgesamt Null. Man hat also, wenn es durch i dividiert wird

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sum_{\alpha=1}^N \phi_\alpha^+ g^0 g^\mu \phi_\alpha S_{\alpha F} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \nu_\beta \left[\psi_{\alpha\beta}^+ g^0 g^\mu \psi_{\alpha\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^0 g^\mu \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \right] \right) = 0 \quad (4.11)$$

Die Identität (4.11) legt die Vermutung nahe, daß wir den Ausdruck in Klammern mit dem Strom (ohne Ladung e) identifizieren dürfen, (Kontinuitätsgleichung). Das heißt (mit Ladung e)

$$-i\mathcal{K} = e \left\{ \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_\alpha^+ g^0 g^\mu \phi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \nu_\beta \left[\psi_{\alpha\beta}^+ g^0 g^\mu \psi_{\alpha\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^0 g^\mu \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \right] \right\} \quad (4.12)$$

Die erste Summe in (4.12) stellt offensichtlich den Strom in der Diracschen (oder auch H. - F.) Theorie der Elektronen ohne Wechselwirkung dar. Ein Raumintegral von i^0 ist also die erste erhaltene Größe, die offenbar nichts anderes als Ladung bedeutet (2)

$$-Q = e \int d^3x \left\{ \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_\alpha^+ \phi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \nu_\beta \left[\psi_{\alpha\beta}^+ \psi_{\alpha\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \right] \right\} \quad (4.13)$$

Um auf die Dipoldichte (siehe Källén: Elementarteilchenphysik, Anhang A 2.6) zu kommen, geht man auf dieselbe Weise vor wie in der Diracschen Theorie. Man bekommt

$$e \frac{i}{4m} \left(\sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_\alpha^+ g^0 [g^\nu, g^\mu] \phi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \nu_\beta \left(\psi_{\alpha\beta}^+ g^0 [g^\nu, g^\mu] \psi_{\alpha\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^0 [g^\nu, g^\mu] \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \right) \right) = -m^{\mu\nu} \quad (4.14)$$

wo gilt

$$\partial^\mu (m^{\mu\nu}) = i^{\nu} \quad (4.15)$$

wo $i^{1\nu}$ der Strom ist, der durch das Dipolmoment $m^{\mu\nu}$ hervorgerufen ist. Nun kann man versuchen, eine Größe zu finden, die die Bedeutung vom Energie - Impuls - Tensor hat. Wenn

$$D\psi = 0 \quad (4.16)$$

dann ist auch

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^\mu{}_\nu = \psi^+ \frac{\partial}{\partial x^\nu} (g^{\mu 0} D\psi) - (g^{\mu 0} D\psi)^+ \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} (=0) \quad (4.17)$$

wobei (2)

$$T^\mu{}_\nu = i \psi^+ g^{\mu 0} g_{\nu 0} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi \quad (4.18)$$

Dasselbe machen wir auch hier. Nach (3.79) und (4.17) haben wir

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^+ \frac{\partial}{\partial x^\nu} (g^{\mu 0} D\phi_\alpha) &= e \frac{1}{2} \phi_\alpha^+ g^{\mu 0} g_{\nu 0} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\sum_{\beta=1}^N (\tilde{\psi}_{\alpha\beta} \pi_\mu^\beta + \pi_\mu^{*\beta} \psi_{\alpha\beta}) \nu_\beta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\pi_\mu^{\alpha'\alpha'} \phi_\alpha - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \phi_{\alpha'}) \right] \end{aligned} \quad (4.18')$$

und analog

$$\begin{aligned} (g^{\mu 0} D\phi_\alpha)^+ \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi_\alpha &= e \frac{1}{2} \left[\sum_{\beta=1}^N (\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \pi_\mu^{*\beta} + \pi_\mu^\beta \psi_{\alpha\beta}^+) \nu_\beta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\pi_\mu^{\alpha'\alpha'} \phi_\alpha^+ - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \phi_{\alpha'}^+) \right] g^{\mu 0} g_{\nu 0} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\nu} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Gleichungen (4.18') und (4.19) subtrahieren wir entsprechend (4.17) voneinander

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(i \phi_\alpha^+ g^{\mu 0} g_{\nu 0} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi_\alpha \right) &= e \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\beta=1}^N \phi_\alpha^+ g^{\mu 0} g_{\nu 0} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\tilde{\psi}_{\alpha\beta} \pi_\mu^\beta] \nu_\beta \right. \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^N \phi_\alpha^+ g^{\mu 0} g_{\nu 0} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\pi_\mu^{*\beta} \psi_{\alpha\beta}] \nu_\beta - \sum_{\beta=1}^N \pi_\mu^{*\beta} \nu_\beta \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^{\mu 0} g_{\nu 0} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\nu} \\ &\quad \left. - \sum_{\beta=1}^N \pi_\mu^\beta \nu_\beta \psi_{\alpha\beta}^+ g^{\mu 0} g_{\nu 0} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\nu} + \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} \phi_\alpha^+ g^{\mu 0} g_{\nu 0} \frac{\partial \pi_\mu^{\alpha'\alpha'}}{\partial x^\nu} \phi_\alpha \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} \phi_{\alpha}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} - \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} \phi_{\alpha}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'}}{\partial x^{\nu}} \phi_{\alpha'} \\
 & - \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} \phi_{\alpha}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \phi_{\alpha'}}{\partial x^{\nu}} \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} - \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \\
 & + \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'} \phi_{\alpha'}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \} \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Das zweitletzte und fünftletzte Glied fallen weg. Wenn man (4.20) mit $S_{\alpha F}$ multipliziert und dann über α summiert, fallen das 1. und 3. Glied in ähnlicher Weise weg also erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(i \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_{\alpha}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \right) = e \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \nu_{\beta} \phi_{\alpha}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} [\tilde{\Psi}_{\alpha\beta} \Pi_{\mu}^{\beta}] \right. \\
 & + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \nu_{\beta} \phi_{\alpha}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} [\Pi_{\mu}^{*\beta} \Psi_{\alpha\beta}] - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \Pi_{\mu}^{*\beta} \nu_{\beta} \tilde{\Psi}_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \\
 & - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \Pi_{\mu}^{\beta} \nu_{\beta} \Psi_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \frac{\partial \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'}}{\partial x^{\nu}} \phi_{\alpha}^+ g_{\sigma\mu} \phi_{\alpha'} \\
 & \left. - \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \frac{\partial \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'}}{\partial x^{\nu}} \phi_{\alpha}^+ g_{\sigma\mu} \phi_{\alpha'} \right\} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Der Beitrag von $\Psi_{\alpha\beta}$ sieht sehr ähnlich aus

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(i \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \Psi_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \Psi_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \nu_{\beta} \right) = e \left\{ \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \nu_{\beta} \Psi_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} [\Pi_{\mu}^{\beta} \phi_{\alpha}] \right. \\
 & - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} \nu_{\beta} \Pi_{\mu}^{*\beta} \phi_{\alpha}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \Psi_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \nu_{\beta} \frac{\partial \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'}}{\partial x^{\nu}} \Psi_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \Psi_{\alpha'\beta} \\
 & \left. - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{N}} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \nu_{\beta} \frac{\partial \Pi_{\mu}^{\alpha\alpha'}}{\partial x^{\nu}} \Psi_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \Psi_{\alpha'\beta} \right\} \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(i \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \nu_\beta \right) &= e \left\{ \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \nu_\beta \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [\pi_\mu^{\alpha\beta} \phi_\alpha] \right. \\
 &- \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \nu_\beta \pi_\mu^{\alpha\beta} \phi_\alpha^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \nu_\beta \frac{\partial \pi_\mu^{\alpha\alpha'}}{\partial x^\nu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \\
 &\left. - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \nu_\beta \frac{\partial \pi_\mu^{\alpha\alpha'}}{\partial x^\nu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta} \right\} \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Wenn die Gleichungen (4.22) und (4.23) mit $\frac{1}{2}$ multipliziert und diese Gleichungen zusammen mit (4.21) aufsummiert werden, stellt man fest, daß aus den rechten Seiten das 3. und 4. Glied von (4.21), und das 2. Glied von (4.22) und (4.23) sich gegenseitig wegheben, wenn wir die Ableitung der Produkte durchführen. Man bekommt

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ i \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_\alpha^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\nu} \right. \\
 &+ i \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \nu_\beta \left[\psi_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right] \Big\} \\
 &= e \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} \frac{\partial \pi_\mu^{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \nu_\beta 2 \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} (\psi_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \phi_\alpha + \phi_\alpha^+ g_{\sigma\mu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}) \right] \right. \\
 &+ \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} \frac{\partial \pi_\mu^{\alpha'\beta}}{\partial x^\nu} \nu_\beta 2 \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} (\phi_\alpha^+ g_{\sigma\mu} \psi_{\alpha\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \phi_\alpha) \right] \\
 &\sum_{\alpha'=1}^N \frac{\partial \pi_\mu^{\alpha\alpha'}}{\partial x^\nu} S_{\alpha' F} \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \left[\phi_\alpha^+ g_{\sigma\mu} \phi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} \nu_\beta (\psi_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \psi_{\alpha\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}) \right] \\
 &- \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \frac{\partial \pi_\mu^{\alpha\alpha'}}{\partial x^\nu} \left[\phi_\alpha^+ g_{\sigma\mu} \phi_{\alpha'} \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} \nu_\beta (\psi_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \psi_{\alpha'\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta}) \right] \Big\} \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

Die Ausdrücke in eckigen Klammern sind gerade die rechten Seiten der Gleichungen (3.83), (3.82) und (3.84) wenn $\alpha = \alpha'$ und $\alpha \neq \alpha'$.

Nehmen wir zuerst die beiden ersten Glieder.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\beta=1}^{\kappa} \frac{\partial \pi_{\mu}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \nu_{\beta} \square \pi_{\sigma}^{*\beta} g^{\sigma\mu} + \sum_{\beta=1}^{\kappa} \frac{\partial \pi_{\mu}^{*\beta}}{\partial x^{\nu}} \nu_{\beta} \square \pi_{\sigma}^{\beta} g^{\sigma\mu} \\
 &= \sum_{\beta=1}^{\kappa} \nu_{\beta} g^{\sigma\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left[\frac{\partial \pi_{\mu}^{*\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \right] - \sum_{\beta=1}^{\kappa} \nu_{\beta} g^{\sigma\mu} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \pi_{\mu}^{*\beta}}{\partial x^{\kappa}} \right) \\
 &+ \sum_{\beta=1}^{\kappa} \nu_{\beta} g^{\sigma\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left[\frac{\partial \pi_{\mu}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{*\beta}}{\partial x^{\kappa}} \right] \\
 &\quad - \sum_{\beta=1}^{\kappa} \nu_{\beta} g^{\sigma\mu} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{*\beta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \pi_{\mu}^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \right) \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

wobei wir die Regel der Produkt-Ableitung benutzt haben. Die ungeraden Glieder können zusammengeschrieben werden

$$\begin{aligned}
 & g^{\sigma\mu} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \pi_{\mu}^{*\beta}}{\partial x^{\kappa}} \right) + g^{\sigma\mu} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{*\beta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \pi_{\mu}^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \pi_{\sigma}^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \pi_{\mu}^{*\beta}}{\partial x^{\kappa}} g^{\mu\sigma} \right) \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

weil

$$g^{\mu\sigma} = g^{\sigma\mu} \quad (4.27)$$

wobei (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\sigma} \quad (4.27a)$$

und

$$\frac{\partial \pi_{\sigma}^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \pi_{\mu}^{*\beta}}{\partial x^{\kappa}} = \frac{\partial \pi_{\sigma}^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \pi_{\mu}^{*\beta}}{\partial x^{\kappa}} \quad (4.28)$$

Mittels (4.26) kann man (4.25) umschreiben, wobei

$$\begin{aligned}
 & \lambda \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \lambda \\
 & \sum_{\beta=1}^{\kappa} \frac{\partial \pi_{\mu}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \gamma_{\beta} g^{\sigma\mu} \square \pi_{\sigma}^{*\beta} + \sum_{\beta=1}^{\kappa} \frac{\partial \pi_{\mu}^{*\beta}}{\partial x^{\nu}} \gamma_{\beta} g^{\sigma\mu} \square \pi_{\sigma}^{\beta} \\
 & = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[\sum_{\beta=1}^{\kappa} g^{\lambda\sigma} \gamma_{\beta} \left(\frac{\partial \pi_{\lambda}^{*\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{\beta}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial \pi_{\lambda}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{*\beta}}{\partial x_{\mu}} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \delta_{\mu\nu} \sum_{\beta=1}^{\kappa} \gamma_{\beta} g^{\lambda\sigma} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{\beta}}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial \pi_{\lambda}^{*\beta}}{\partial x^{\tau}} \right] \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

Analog behandelt man das dritte Glied rechts in (4.24). Das heißt

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \frac{\partial \pi_{\mu}^{\alpha\alpha'}}{\partial x^{\nu}} \square \pi_{\sigma}^{\alpha\alpha} g^{\sigma\mu} \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[\frac{\partial \pi_{\lambda}^{\alpha\alpha'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{\alpha\alpha}}{\partial x_{\mu}} \right] \\
 & \quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma\lambda} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{\alpha\alpha}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \pi_{\lambda}^{\alpha\alpha'}}{\partial x_{\mu}} \right) \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Die letzte Summe gibt wie üblich

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma\lambda} \frac{\partial \pi_{\sigma}^{\alpha\alpha}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \pi_{\lambda}^{\alpha\alpha'}}{\partial x_{\mu}} \right) \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left[\frac{\partial \pi_{\sigma}^{\alpha\alpha}}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial \pi_{\lambda}^{\alpha\alpha'}}{\partial x^{\tau}} \right] \\
 & \quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma\lambda} \frac{\partial \pi_{\lambda}^{\alpha\alpha'}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \pi_{\sigma}^{\alpha\alpha}}{\partial x_{\mu}} \right) \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

wenn $\alpha \leftrightarrow \alpha'$ und (4.27), (4.28) benutzt wird, sieht man, daß die 2. Summe in (4.31) identisch ist mit der links liegenden in (4.31).

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \frac{\partial \Pi_{\mu}^{\alpha \alpha'}}{\partial x^{\nu}} \square \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'} g^{\sigma \mu} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma \lambda} \frac{\partial \Pi_{\lambda}^{\alpha \alpha'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}}{\partial x_{\mu}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4} \delta_{\mu \nu} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma \lambda} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial \Pi_{\lambda}^{\alpha \alpha'}}{\partial x^{\tau}} \right] \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Dieselbe Behandlung des dritten Gliedes in (4.24) ergibt

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \frac{\partial \Pi_{\mu}^{\alpha \alpha'}}{\partial x^{\nu}} g^{\sigma \mu} \square \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma \lambda} \frac{\partial \Pi_{\lambda}^{\alpha \alpha'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}}{\partial x_{\mu}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{4} \delta_{\mu \nu} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma \lambda} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial \Pi_{\lambda}^{\alpha \alpha'}}{\partial x^{\tau}} \right] \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Die aufsummierten rechten Seiten von (4.29), (4.32) und (4.33) bilden die rechte Seite von (4.24). Man hat also

$$\begin{aligned}
 & i \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_{\alpha}^{+} g^{\sigma \mu} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + i \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \nu_{\beta} \left[\psi_{\alpha \beta}^{+} g^{\sigma \mu} \frac{\partial \psi_{\alpha \beta}}{\partial x^{\nu}} + \tilde{\psi}_{\alpha \beta}^{+} g^{\sigma \mu} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha \beta}}{\partial x^{\nu}} \right] \\
 & - \sum_{\beta=1}^{\pi} \nu_{\beta} \left[g^{\lambda \sigma} \left(\frac{\partial \Pi_{\lambda}^{* \beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\beta}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial \Pi_{\lambda}^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{* \beta}}{\partial x_{\mu}} \right) - \delta_{\mu \nu} g^{\sigma \lambda} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\beta}}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial \Pi_{\lambda}^{* \beta}}{\partial x^{\tau}} \right] \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma \lambda} \left[\frac{\partial \Pi_{\lambda}^{\alpha \alpha'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}}{\partial x_{\mu}} - \frac{1}{2} \delta_{\mu \nu} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial \Pi_{\lambda}^{\alpha \alpha'}}{\partial x^{\tau}} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} g^{\sigma \lambda} \left[\frac{\partial \Pi_{\lambda}^{\alpha \alpha'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}}{\partial x_{\mu}} - \frac{1}{2} \delta_{\mu \nu} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial \Pi_{\lambda}^{\alpha \alpha'}}{\partial x^{\tau}} \right] = -T^{\mu}_{\nu} \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

und das ergibt

$$\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (4.35)$$

Die erste Summe in (4.34) stellt wiederum den Energie - Impuls - Tensor (2) in der Diracschen Theorie der freien Elektronen dar. Analog sieht man, daß die dritte Summe in (4.34) identisch mit dem Ausdruck für den Energie - Impuls - Tensor eines freien elektromagnetischen Feldes (in Lorentz-Eichung) ist. Die erste und die zwei letzten Summen in (4.34) bilden dann den Energie - Impuls - Tensor in H. - F. Theorie. Der Energie - Impuls - Vektor ist in dieser Theorie durch die übliche Beziehung charakterisiert.

$$P_\nu = \int d^3x y^0_\nu \quad (4.36)$$

Schließlich hat man noch einen Ausdruck für den Spannungstensor abzuleiten. In der Diracschen Theorie sieht er folgendermaßen aus (2)

$$M^{\mu\nu\lambda} = i\psi^\dagger g^{\rho\mu} (x^\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - x^\lambda \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \sum^{\nu\lambda}) \psi$$

$$\sum^{\nu\lambda} = \frac{1}{4} [g^{\nu\lambda}, g^{\lambda\lambda}] \quad (4.37)$$

Wir versuchen wieder, uns von diesem Vorbild leiten zu lassen, indem wir (4.37) als die Ausgangsbasis weiterer Rechnungen wählen.

Sei

$$i g^{\mu\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} = \mathcal{R} \quad (4.38)$$

Dann erweist sich, daß für $M^{\mu\nu\lambda}$ folgendes gilt

$$\frac{\partial M^{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\mu} = x^\nu \frac{\partial y^{\mu\lambda}}{\partial x^\mu} - x^\lambda \frac{\partial y^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}$$

$$+ \psi^\dagger g^{\rho 0} \sum^{\nu\lambda} \mathcal{R} - (g^{\rho 0} \mathcal{R})^\dagger \sum^{\nu\lambda} \psi \quad (4.39)$$

wobei man die Vertauschungsregel

$$[g^{\mu\lambda}, \sum^{\nu\lambda}] = g^{\mu\nu} g^{\lambda\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\lambda} \quad (4.40)$$

benutzt hat.

$\gamma_{\mu\nu}$

in (4.39) bedeutet die Energie - Impulsdichte.

Schreiben wir nun in (4.39) und (4.38) schrittweise ϕ_α , $\psi_{\alpha\beta}$ und $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$, multiplizieren wir mit $S_{\alpha F}$ und in den Ausdrücken mit β noch mit $\frac{1}{2}\nu_\beta$ und summieren wir über α und β . Dann bekommen wir drei Ausdrücke für $T^{\mu\nu\lambda}$, nämlich für ϕ_α , $\psi_{\alpha\beta}$, $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$. Diese 3 Ausdrücke werden aufsummiert und man bekommt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ i x^\nu \left(\sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_\alpha^+ g^{\sigma\gamma\mu} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \nu_\beta \left[\psi_{\alpha\beta}^+ g^{\sigma\gamma\mu} \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^{\sigma\gamma\mu} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda} \right] \right) - \text{Ausdruck mit vertauschten } \nu \text{ und } \lambda \right. \\ & \left. + i \left(\sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_\alpha^+ g^{\sigma\gamma\mu} \sum^{\nu\lambda} \phi_\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \nu_\beta \left[\psi_{\alpha\beta}^+ g^{\sigma\gamma\mu} \sum^{\nu\lambda} \psi_{\alpha\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^{\sigma\gamma\mu} \sum^{\nu\lambda} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \right] \right) \right\} \\ & = x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(i \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_\alpha^+ g^{\sigma\gamma\mu} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_\lambda} \right. \\ & \left. + i \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \nu_\beta \left[\psi_{\alpha\beta}^+ g^{\sigma\gamma\mu} \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^{\sigma\gamma\mu} \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda} \right] \right) \end{aligned}$$

— Ausdruck mit vertauschten ν und λ

$$\begin{aligned} & + \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_\alpha^+ g^{\sigma} \sum^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\phi_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \nu_\beta \left[\psi_{\alpha\beta}^+ g^{\sigma} \sum^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\psi_{\alpha\beta}} \right. \\ & \left. + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^{\sigma} \sum^{\nu\lambda} \mathcal{R}_{\tilde{\psi}_{\alpha\beta}} \right] - \sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} (g^{\sigma} \mathcal{R}_{\phi_\alpha})^+ \sum^{\nu\lambda} \phi_\alpha \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \nu_\beta \left[(g^{\sigma} \mathcal{R}_{\psi_{\alpha\beta}})^+ \sum^{\nu\lambda} \psi_{\alpha\beta} + (g^{\sigma} \mathcal{R}_{\tilde{\psi}_{\alpha\beta}})^+ \sum^{\nu\lambda} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \right], \end{aligned}$$

(4.41)

wobei wir unter R_{ϕ_α} , $R_{\psi_{\alpha\beta}}$, $R_{\tilde{\psi}_{\alpha\beta}}$ die linken Seiten immer ohne das erste Glied in (3.79), (3.80) und (3.81), aber mit umgekehrten Vorzeichen verstehen! Die Massenterme können offenlichtlich weggelassen werden. Zuerst diskutieren wir die letzten vier Glieder. Wir fassen zunächst diejenigen Terme zusammen, die nur Π_μ^β enthalten.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} \Pi_\mu^\beta S_{\alpha F} \psi_\beta \phi_\alpha^+ g^0 \sum^{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \psi_\beta \psi_{\alpha\beta}^+ g^0 \sum^{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \phi_\alpha \Pi_\mu^\beta \\
 & - \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} \psi_\beta S_{\alpha F} \Pi_\mu^\beta \psi_{\alpha\beta}^+ g^0 g^{\mu\nu} \sum^{\nu\lambda} \phi_\alpha - \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} \psi_\beta S_{\alpha F} \Pi_\mu^\beta \phi_\alpha^+ g^0 g^{\mu\nu} \sum^{\nu\lambda} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \\
 & = \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} \Pi_\mu^\beta S_{\alpha F} \psi_\beta \phi_\alpha^+ g^0 \left[\sum^{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \right] \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \\
 & + \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \psi_\beta \Pi_\mu^\beta \psi_{\alpha\beta}^+ g^0 \left[\sum^{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \right] \phi_\alpha \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Ähnlich fassen wir die Glieder mit $\Pi_\mu^{*\beta}$ zusammen

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \psi_\beta \Pi_\mu^{*\beta} \phi_\alpha^+ g^0 \sum^{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \psi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \psi_\beta \Pi_\mu^{*\beta} \psi_{\alpha\beta}^+ g^0 \sum^{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \phi_\alpha \\
 & - \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \psi_\beta \Pi_\mu^{*\beta} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^0 g^{\mu\nu} \sum^{\nu\lambda} \phi_\alpha - \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \psi_\beta \Pi_\mu^{*\beta} \phi_\alpha^+ g^0 g^{\mu\nu} \sum^{\nu\lambda} \psi_{\alpha\beta} \\
 & = \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \psi_\beta \Pi_\mu^{*\beta} \phi_\alpha^+ g^0 \left[\sum^{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \right] \psi_{\alpha\beta} \\
 & + \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \psi_\beta \Pi_\mu^{*\beta} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^0 \left[\sum^{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \right] \phi_\alpha \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

Das selbe tun wir für $\Pi_\mu^{\alpha\alpha'}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} e \sum_{\alpha\alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \phi_\alpha^+ g^0 \sum^{\nu\lambda} g^{\mu\nu} \phi_{\alpha'} \Pi_\mu^{\alpha\alpha'} + \frac{1}{2} e \sum_{\alpha\alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \psi_\beta \psi_{\alpha\beta}^+ g^0 \sum^{\nu\lambda} \frac{1}{2} S_{\alpha' F} g^{\mu\nu} \psi_{\alpha'\beta} \Pi_\mu^{\alpha\alpha'} \\
 & \frac{1}{2} e \sum_{\alpha\alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\mathcal{K}} S_{\alpha F} \psi_\beta \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^0 \frac{1}{2} \sum^{\nu\lambda} g^{\mu\nu} S_{\alpha' F} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta} \Pi_\mu^{\alpha\alpha'} - \frac{1}{2} e \sum_{\alpha\alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \Pi_\mu^{\alpha\alpha'} \phi_\alpha^+ g^0 g^{\mu\nu} \sum^{\nu\lambda} \phi_{\alpha'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \frac{1}{2} S_{\alpha' F} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \psi_{\alpha\beta}^+ g^0 g^{\mu} \sum^{\nu\lambda} \psi_{\alpha\beta} \\
 & -\frac{1}{2}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \frac{1}{2} S_{\alpha' F} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^0 g^{\mu} \sum^{\nu\lambda} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \\
 & = \frac{1}{2}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha}^+ g^0 [\sum^{\nu\lambda} g^{\mu}] \phi_{\alpha} \\
 & + \frac{1}{4}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \gamma_{\beta} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \psi_{\alpha\beta}^+ g^0 [\sum^{\nu\lambda} g^{\mu}] \psi_{\alpha\beta} \\
 & + \frac{1}{4}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \gamma_{\beta} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^0 [\sum^{\nu\lambda} g^{\mu}] \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

und für $\prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'}$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha}^+ g^0 \sum^{\nu\lambda} g^{\mu} \phi_{\alpha'} - \frac{1}{2}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \psi_{\alpha\beta}^+ g^0 \sum^{\nu\lambda} \frac{1}{2} g^{\mu} S_{\alpha' F} \psi_{\alpha'\beta} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \\
 & -\frac{1}{2}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^0 \sum^{\nu\lambda} \frac{1}{2} g^{\mu} S_{\alpha' F} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \\
 & + \frac{1}{2}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha}^+ g^0 g^{\mu} \sum^{\nu\lambda} \phi_{\alpha'} \\
 & + \frac{1}{2}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \frac{1}{2} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} S_{\alpha' F} \psi_{\alpha'\beta}^+ g^0 g^{\mu} \sum^{\nu\lambda} \psi_{\alpha\beta} \\
 & + \frac{1}{2}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \frac{1}{2} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} S_{\alpha' F} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta}^+ g^0 g^{\mu} \sum^{\nu\lambda} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \\
 & = \frac{1}{2}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \phi_{\alpha}^+ g^0 [g^{\mu}, \sum^{\nu\lambda}] \phi_{\alpha'} \\
 & + \frac{1}{4}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \gamma_{\beta} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \psi_{\alpha\beta}^+ g^0 [g^{\mu}, \sum^{\nu\lambda}] \psi_{\alpha'\beta} \\
 & + \frac{1}{4}e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \gamma_{\beta} \prod_{\mu}^{\alpha, \alpha'} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g^0 [g^{\mu}, \sum^{\nu\lambda}] \tilde{\psi}_{\alpha'\beta} \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

Man kommt auf die rechte Seite von (4.45), wenn man bei den letzten drei Gliedern in (4.45) links α und α' vertauscht. Nach (4.41) sollen die rechten Seiten von (4.42), (4.43), (4.44) und (4.45) aufsummiert werden. Um das möglichst einfach zu erreichen, benutzen wir (4.40). Dann reduziert sich (4.42) auf

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} \pi_{\mu}^{\beta} g^{\mu\lambda} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \phi_{\alpha}^{\dagger} g^{\sigma\gamma} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} \pi_{\mu}^{\beta} g^{\mu\nu} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \phi_{\alpha}^{\dagger} g^{\sigma\gamma} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \\
 & + \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} \pi_{\mu}^{\beta} g^{\mu\lambda} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \psi_{\alpha\beta}^{\dagger} g^{\sigma\gamma} \phi_{\alpha} - \frac{1}{2} e \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} \pi_{\mu}^{\beta} g^{\mu\nu} S_{\alpha F} \gamma_{\beta} \psi_{\alpha\beta}^{\dagger} g^{\sigma\gamma} \phi_{\alpha} \\
 & = \sum_{\beta=1}^{\pi} \pi_{\mu}^{\beta} g^{\mu\lambda} \gamma_{\beta} g^{\sigma\nu} \square \pi_{\sigma}^{*\beta} - \sum_{\beta=1}^{\pi} \pi_{\mu}^{\beta} g^{\mu\nu} \gamma_{\beta} g^{\sigma\lambda} \square \pi_{\sigma}^{*\beta} \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

Auf ein ähnliches Resultat kommen wir, wenn wir (4.43) vereinfachen,

$$\sum_{\beta=1}^{\pi} \pi_{\mu}^{*\beta} g^{\mu\lambda} \gamma_{\beta} g^{\sigma\nu} \square \pi_{\sigma}^{\beta} - \sum_{\beta=1}^{\pi} \pi_{\mu}^{*\beta} g^{\mu\nu} \gamma_{\beta} g^{\sigma\lambda} \square \pi_{\sigma}^{\beta} \quad (4.47)$$

Dabei haben wir die Gleichungen (3.82) und (3.83) benutzt. Nun reduzieren wir (4.44) mittels (4.40)

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \prod_{\mu}^{\alpha\alpha'} g^{\mu\lambda} \phi_{\alpha}^{\dagger} g^{\sigma\gamma} \phi_{\alpha} - \frac{1}{2} e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \prod_{\mu}^{\alpha\alpha'} g^{\mu\nu} \phi_{\alpha}^{\dagger} g^{\sigma\gamma} \phi_{\alpha} \\
 & + \frac{1}{4} e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \gamma_{\beta} \prod_{\mu}^{\alpha\alpha'} g^{\mu\lambda} \psi_{\alpha\beta}^{\dagger} g^{\sigma\gamma} \psi_{\alpha\beta} \\
 & - \frac{1}{4} e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \gamma_{\beta} \prod_{\mu}^{\alpha\alpha'} g^{\mu\nu} \psi_{\alpha\beta}^{\dagger} g^{\sigma\gamma} \psi_{\alpha\beta} \\
 & + \frac{1}{4} e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \gamma_{\beta} \prod_{\mu}^{\alpha\alpha'} g^{\mu\lambda} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{\dagger} g^{\sigma\gamma} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} \\
 & - \frac{1}{4} e \sum_{\alpha, \alpha'=1}^N \sum_{\beta=1}^{\pi} S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \gamma_{\beta} \prod_{\mu}^{\alpha\alpha'} g^{\mu\nu} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^{\dagger} g^{\sigma\gamma} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} \Pi_{\mu}^{\alpha \alpha'} g^{\mu \lambda} S_{\alpha' F} g^{\sigma \nu} \square \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'} \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} \Pi_{\mu}^{\alpha \alpha'} g^{\mu \nu} S_{\alpha' F} g^{\sigma \lambda} \square \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Jetzt bleibt nur noch dieselbe Reduktion von (4.45), die ähnlich durchgeführt wird. Man bekommt

$$\begin{aligned}
 &- \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \Pi_{\mu}^{\alpha \alpha'} g^{\mu \lambda} g^{\sigma \nu} \square \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \Pi_{\mu}^{\alpha \alpha'} g^{\mu \nu} g^{\sigma \lambda} \square \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Um auf die Ausdrücke (4.48) und (4.49) zu kommen, haben wir die Gleichung (3.84) benutzt. Führen wir nun das folgende Symbol ein

$$\sum^{\mu \nu, \sigma \lambda} = g^{\mu \nu} g^{\sigma \lambda} - g^{\mu \lambda} g^{\sigma \nu} \tag{4.50}$$

und vereinfachen (4.46) zu

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\beta=1}^{\kappa} \Pi_{\tau}^{\beta} g^{\tau \lambda} \gamma_{\beta} g^{\sigma \nu} \partial_{\mu} \partial^{\mu} \Pi_{\sigma}^{*\beta} - \sum_{\beta=1}^{\kappa} \Pi_{\tau}^{\beta} g^{\tau \nu} \gamma_{\beta} g^{\sigma \lambda} \partial_{\mu} \partial^{\mu} \Pi_{\sigma}^{*\beta} \\
 &= \partial^{\mu} \left(\sum_{\beta=1}^{\kappa} \Pi_{\tau}^{\beta} \partial_{\mu} \Pi_{\sigma}^{*\beta} \gamma_{\beta} \sum^{\tau \lambda, \sigma \nu} \right) \\
 &- \sum_{\beta=1}^{\kappa} \partial^{\mu} \Pi_{\tau}^{\beta} \partial_{\mu} \Pi_{\sigma}^{*\beta} \gamma_{\beta} \sum^{\tau \lambda, \sigma \nu}
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Analog für (4.47). Man bekommt

$$\begin{aligned}
 &\partial^{\mu} \left(\sum_{\beta=1}^{\kappa} \Pi_{\tau}^{*\beta} \partial_{\mu} \Pi_{\sigma}^{\beta} \gamma_{\beta} \sum^{\tau \lambda, \sigma \nu} \right) \\
 &- \sum_{\beta=1}^{\kappa} \partial^{\mu} \Pi_{\tau}^{*\beta} \partial_{\mu} \Pi_{\sigma}^{\beta} \gamma_{\beta} \sum^{\tau \lambda, \sigma \nu}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Wenn man (4.51) und (4.52) aufsummiert, dann fallen die zweiten Glieder aus, da $\sum_{\beta=1}^{\kappa} (\partial^{\mu} \Pi_{\tau}^{*\beta} \partial_{\mu} \Pi_{\sigma}^{\beta} + \partial^{\mu} \Pi_{\tau}^{\beta} \partial_{\mu} \Pi_{\sigma}^{*\beta}) \gamma_{\beta}$ symmetrisch und $\sum^{\tau \lambda, \sigma \nu}$ antisymmetrisch gegen Vertauschung τ, σ ist. Ähnliche Überlegungen kann man auch bei (4.48) und (4.49) durchführen.

Man bekommt dann insgesamt, daß die letzten vier Glieder in (4.41) gleich

$$\begin{aligned} \partial^\mu \left[\sum_{\beta=1}^{\infty} \left(\pi_\tau^\beta \frac{\partial \pi_\sigma^{*\beta}}{\partial x_\mu} + \pi_\tau^{*\beta} \frac{\partial \pi_\sigma^\beta}{\partial x_\mu} \right) \nu_\beta \sum^{\tau\lambda, \sigma\nu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \pi_\tau^{\alpha\alpha'} \frac{\partial \pi_\sigma^{\alpha\alpha'}}{\partial x_\mu} \sum^{\tau\lambda, \sigma\nu} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \pi_\tau^{\alpha\alpha'} \frac{\partial \pi_\sigma^{\alpha\alpha'}}{\partial x_\mu} \sum^{\tau\lambda, \sigma\nu} \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

sind.

Wir kehren jetzt zu der Gleichung (4.41) zurück. Bezeichnen wir die ersten zwei Summen in (4.34) als $y_{(1)}^\mu$ und den Rest mit $y_{(2)}^\mu$, dann können die ersten zwei Ausdrücke auf der rechten Seite in (4.41) folgendermaßen geschrieben werden

$$\begin{aligned} x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} y_{(1)}^{\mu\lambda} - x^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\mu} y_{(1)}^{\mu\nu} &= -x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} y_{(2)}^{\mu\lambda} + x^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\mu} y_{(2)}^{\mu\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (-x^\nu y_{(2)}^{\mu\lambda} + x^\lambda y_{(2)}^{\mu\nu}) + y_{(2)}^{\nu\lambda} - y_{(2)}^{\lambda\nu} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Nach (4.34) ist es offenbar

$$y_{(2)}^{\nu\lambda} = y_{(2)}^{\lambda\nu} \quad (4.55)$$

wodurch bewiesen ist, daß die rechte Seite von (4.41) als eine Divergenz geschrieben werden kann. Nun können wir schreiben

$$\begin{aligned} x^\nu y^{\mu\lambda} - x^\lambda y^{\mu\nu} + i \left[\sum_{\alpha=1}^N S_{\alpha F} \phi_\alpha^+ g_{\sigma\mu} \sum^{\nu\lambda} \phi_\alpha \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^{\infty} S_{\alpha F} \nu_\beta (\psi_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \sum^{\nu\lambda} \psi_{\alpha\beta} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ g_{\sigma\mu} \sum^{\nu\lambda} \tilde{\psi}_{\alpha\beta}) \right] \\ - \sum_{\beta=1}^{\infty} \left(\pi_\tau^\beta \frac{\partial \pi_\sigma^{*\beta}}{\partial x_\mu} + \pi_\tau^{*\beta} \frac{\partial \pi_\sigma^\beta}{\partial x_\mu} \right) \nu_\beta \sum^{\tau\lambda, \sigma\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \Pi_{\tau}^{\alpha \alpha'} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}}{\partial x_{\mu}} \sum \tau_{\lambda, \sigma \nu} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ =1}}^N S_{\alpha F} S_{\alpha' F} \Pi_{\tau}^{\alpha \alpha'} \frac{\partial \Pi_{\sigma}^{\alpha \alpha'}}{\partial x_{\mu}} \sum \tau_{\lambda, \sigma \nu} = -\gamma^{\mu \nu \lambda}
 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Diese Größe hat also die Eigenschaft

$$\frac{\partial M^{\mu \nu \lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (4.57)$$

und deswegen können wir $M^{\mu \nu \lambda}$ als den Spannungstensor interpretieren. Der Ausdruck für Drehimpuls sieht also folgendermaßen aus (2)

$$M^{\nu \lambda} = \int d^3 x M^{0 \nu \lambda} \quad (4.58)$$

Nun vergleichen wir (4.56) mit den üblichen Ausdrücken. In der Dirac'schen Theorie des freien Elektrons müssen wir $\psi_{\alpha\beta} = \tilde{\psi}_{\alpha\beta} = \pi_{\mu}^{\alpha} = \pi_{\mu}^{\alpha\beta} = 0$; für den Fall eines freien elektromagnetischen Feldes $\phi_{\alpha} = \psi_{\alpha\beta} = \tilde{\psi}_{\alpha\beta} = \pi_{\mu}^{\alpha\beta} = 0$ und für die H. - F. Theorie $\psi_{\alpha\beta} = \tilde{\psi}_{\alpha\beta} = \pi_{\mu}^{\beta} = 0$ einsetzen. Man sieht, daß (4.56) wirklich in die üblichen Beziehungen übergeht (das elektromagnetische Feld ist in Lorentz - Eichung angegeben).

Die erhaltenen Größen Q (4.13), P_{ν} (4.36) und $M^{\nu\lambda}$ (4.58) repräsentieren die Ladung, den Energie - Impuls - Vektor und den Drehimpuls - Tensor, die zu jedem Zustand eindeutig zugeordnet sind. Ein Zustand wird durch das System (3.79) bis (3.84) charakterisiert, wobei N, χ endlich gelassen sind (siehe die ausführliche Diskussion am Ende des Abschnitts 3). Die physikalische Interpretierbarkeit eines Zustandes ist dadurch sichergestellt.

5. Die Renormierung

Wie üblich, darf man die Parameter $\underline{e}$ und $\underline{m}$, die bis jetzt immer aufgetreten sind, mit der Ladung und Masse eines freien Elektrons nicht identifizieren. Bezeichnen wir diese mit e_0 und m_0 im Gegensatz zu den physikalischen Größen e und m . Unsere Aufgabe ist nun, die Beziehungen unter diesen Größen zu finden, wobei wir uns nur auf den Spezialfall eines gebundenen Zustandes beschränken. Zunächst muß festgestellt werden, wie sich unsere Ausgangsgleichungen (3.79) bis (3.84) ändern, wenn wir ein äußeres Potential $V(r)$ einführen. Weil $V(r)$ kein Operator ist, können wir sofort schreiben

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x^\mu} - (e_0 V(r) + m_0) \phi_\alpha - \frac{1}{2} e_0 \gamma^\mu \left[\sum_{\beta=1}^N (\tilde{\psi}_{\alpha\beta} \pi_\mu^\beta + \psi_{\alpha\beta} \pi_\mu^{*\beta}) \gamma_\beta \right. \\ \left. + \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\pi_\mu^{\alpha\alpha'} \phi_\alpha - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \phi_{\alpha'}) \right] = 0 \quad (5.1)$$

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - (e_0 V(r) + m_0) \psi_{\alpha\beta} - e_0 \gamma^\mu \left[\pi_\mu^\beta \phi_\alpha \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\pi_\mu^{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha\beta} - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \psi_{\alpha'\beta}) \right] = 0 \quad (5.2)$$

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - (e_0 V(r) + m_0) \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - e_0 \gamma^\mu \left[\pi_\mu^{*\beta} \phi_\alpha \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\pi_\mu^{\alpha\alpha'} \tilde{\psi}_{\alpha\beta} - \pi_\mu^{\alpha'\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha'\beta}) \right] = 0 \quad (5.3)$$

und die anderen Gleichungen bleiben unverändert

$$\square \pi_\mu^\alpha = \frac{1}{2} e_0 \left[\sum_{\alpha'=1}^N S_{\alpha'F} (\phi_\alpha^+ \gamma_0 \gamma_\mu \psi_{\alpha'} + \tilde{\psi}_{\alpha\alpha}^+ \gamma_0 \gamma_\mu \phi_{\alpha'}) \right] \quad (5.4)$$

$$\square \pi_\mu^{\alpha\beta} = e_0 \left[\phi_\alpha^+ \gamma_0 \gamma_\mu \phi_\beta \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\beta'=1}^N (\psi_{\alpha\beta}^+ \gamma_0 \gamma_\mu \psi_{\beta'} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^+ \gamma_0 \gamma_\mu \tilde{\psi}_{\beta'}) \gamma_{\beta'} \right] \quad (5.5)$$

Nehmen wir nun irgendeine Lösung der Gleichungen (5.1), ..., (5.5), die wir mit $\phi_\alpha(V)$, ..., $\Pi_\mu^{\alpha\beta}(V)$ bezeichnen, wobei wir annehmen werden, daß sie einen stationären gebundenen Zustand beschreiben. Das heißt

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(V) &= \phi_\alpha^s e^{iE_\alpha t}, \quad \psi_{\alpha\beta}(V) = \psi_{\alpha\beta}^s e^{i(E_\alpha + E_\beta)t} \\ \tilde{\psi}_{\alpha\beta}(V) &= \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^s e^{i(E_\alpha - E_\beta)t}, \quad \Pi_\mu^\beta(V) = \Pi_\mu^{s\beta} e^{iE_\beta t} \\ \Pi_\mu^{\alpha\beta}(V) &= \Pi_\mu^{s\alpha\beta} e^{i(E_\beta - E_\alpha)t}\end{aligned}\tag{5.6}$$

(Man prüft leicht nach, daß dieser Ansatz mit den Gleichungen (5.1) bis (5.5) verträglich ist.) Da wir einen Bindungszustand annehmen, fordern wir, daß

$$\phi_\alpha(V)_{r \rightarrow \infty}, \dots, \Pi_\mu^{\alpha\beta}(V)_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0\tag{5.7}$$

Führen wir jetzt eine dreidimensionale Oberfläche σ_k ein, deren Schnitt mit dem dreidimensionalen Raum den Pol von $V(r)$ umgibt (sie ist also geschlossen): sie ist eine zweidimensionale Oberfläche im dreidimensionalen Raum. Die dritte Dimension bildet die Zeit t . Dieses σ_k soll ein Element einer Menge der Oberflächen $\{\sigma_k\}$ sein, wobei für $k \rightarrow \infty$ σ_k raumartig ins Unendliche divergieren soll. (Die raumartige Entfernung jedes Punktes der Oberfläche σ_k von einem beliebigen Punkt soll divergieren für $k \rightarrow \infty$). Mit Hilfe von diesen Oberflächen werden wir versuchen, ein formales Verfahren anzugeben, wie man aus einem gebundenen einen freien Zustand herstellt, denn dies ist gerade für die Renormierung notwendig. Wählen wir ein bestimmtes σ_k und suchen wir solche Funktionen ϕ_α , $\psi_{\alpha\beta}$, $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}$, Π_μ^β und $\Pi_\mu^{\alpha\beta}$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- sie genügen den Gleichungen (3.79) bis (3.84) (also ohne das äußere Potential $V(r)$), wobei statt $e \rightarrow e_0$ und $m \rightarrow m_0$ zu schreiben ist
- auf der Oberfläche σ_k soll

$$\phi_\alpha(V) = \phi_\alpha(k), \quad \psi_{\alpha\beta}(V) = \psi_{\alpha\beta}(k), \quad \tilde{\psi}_{\alpha\beta}(V) = \tilde{\psi}_{\alpha\beta}(k)$$

$$\begin{aligned}\pi_{\mu}^{\beta}(V) &= \pi_{\mu(k)}^{\beta}, \quad \partial_{(n)} \pi_{\mu}^{\beta}(V) = \partial_{(n)} \pi_{\mu(k)}^{\beta}, \quad \pi_{\mu}^{\alpha\beta}(V) = \pi_{\mu(k)}^{\alpha\beta} \\ \partial_{(n)} \pi_{\mu}^{\alpha\beta}(V) &= \partial_{(n)} \pi_{\mu(k)}^{\alpha\beta},\end{aligned}$$

wobei man unter $\partial_{(n)}$ eine Ableitung entlang der Normalen auf σ_k zu verstehen hat. Die Bedingung b) ist wegen (5.6) zu jedem Zeitpunkt erfüllt, wodurch eine eindeutige Konstruktion von $\phi_{\alpha(k)}, \dots, \pi_{\mu(k)}^{\alpha\beta}$ sichergestellt ist. Wir fragen uns nun, wie man diese Lösungen der Gleichungen (3.79) bis (3.84) interpretieren soll. In (3.79) bis (3.84) tritt kein äußeres Potential $V(r)$ auf und folglich enthalten die $\phi_{\alpha(k)}, \dots, \pi_{\mu(k)}^{\alpha\beta}$ nur solche Wechselwirkungen, die unter Elektronen und Vakuumelektronen (und also auch Positronen) vorhanden sind. Weil nun auch

$$\phi_{\alpha(k)}, \dots, \pi_{\mu(k)}^{\alpha\beta} (k \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty \quad (5.7a)$$

konvergiert, schließen wir daraus, daß $\phi_{\alpha(k)}, \dots, \pi_{\mu(k)}^{\alpha\beta}$, wenn $k \rightarrow \infty$, entweder einen gebundenen Zustand beschreiben, wobei wegen (5.7) weder Ladung noch Energie irreversibel ins Unendliche hinausfließt, oder einen solchen Zustand charakterisieren, in dem die Elektronen schon voneinander entkoppelt sind. Die erste Möglichkeit (ein gebundener Zustand) kann sich nicht realisieren, denn dieser ist nicht stationär und zwar wegen der Abwesenheit des äußeren Potentials (Elektronen und Positronen bilden keinen stationären Zustand). Diese ungenauen und formalen Überlegungen zeigen uns, daß wir erwarten können, daß man für $k \rightarrow \infty$ einen Zustand erhält, in dem beobachtbare Elektronen und Positronen voneinander entkoppelt sind (die zweite Möglichkeit). Hier sieht man auch, warum wir die Oberflächen σ_k als geschlossen angenommen haben: Man konnte sonst die Bedingung (5.7) nicht aufrecht erhalten. (Wir meinen die Schnitte der Oberflächen σ_k mit dem dreidimensionalen Raum).

Wenden wir uns nun der Ladungsrenormierung zu. Weil wir annehmen, daß es uns gelungen ist, beobachtbare Elektronen und Positronen voneinander zu trennen, (die $\phi_{\alpha(k)}, \dots, \pi_{\mu(k)}^{\alpha\beta}$ für $k \rightarrow \infty$ beschreiben diesen Zustand), können wir versuchen, die Ladung eines solchen Zustandes

festzustellen. Nach der speziellen Relativitätstheorie ist

$$Q = e_0 \int_{\sigma_k} i_\mu d\sigma_k^\mu \tilde{e}_0^{-1} = e_0 Q' \quad (5.8)$$

Der Strom im Falle des äußeren Potentials ist auch mit (4.12) angegeben. Ferner nehmen wir an, daß das Potential durch die nackte Ladung Ze_0 hervorgerufen wird. Da in der Definition des Stroms kein Potential auftritt, schließen wir daraus, daß wegen der Bedingung b) der Zustand

$\phi_\alpha(V), \dots, \prod_{\mu}^{\alpha\beta}(V)$ dieselbe Ladung trägt wie der, den die $\phi_\alpha(k), \dots, \prod_{\mu(k)}^{\alpha\beta}$ beschreiben. Wir können also schreiben

$$e_0 Q' - Z e_0 = (z - Z) e \quad (5.9)$$

wobei z die Anzahl von Elektronen im gebundenen Zustand und e die renormierte Ladung (wir nehmen $z \neq Z$ an), denn diese Ladung kann direkt auf dem System gemessen werden. Es ist also

$$e_0 = \frac{z - Z}{Q' - Z} e \quad (5.10)$$

und

$$Q = \frac{z - Z}{Q' - Z} Q' e, \quad A = \frac{z - Z}{Q' - Z} Q' \quad (5.11)$$

Hier braucht k noch nicht zu divergieren, weil Q von der Wahl der Oberfläche σ_k nicht abhängig ist. Dieselbe Ladung Q trägt aber auch das von uns konstruierte Feld $\phi_\alpha(k), \dots, \prod_{\mu(k)}^{\alpha\beta} (k \rightarrow \infty)$, das beobachtbare Teilchen beschreibt, die nicht untereinander wechselwirken.

Beobachtbare Größen für ein freies Elektron (das nur unter dem Einfluß des Vakuums steht) erhält man, wenn man diese, die durch $\phi_\alpha(k), \dots, \prod_{\mu(k)}^{\alpha\beta} k \rightarrow \infty$ ausgedrückt sind, renormiert: Man dividiert sie durch A . So führt man auch die Massenrenormierung durch. Aus (5.7a) folgt, daß die Teilchen, die durch die Funktionen in (5.7a) beschrieben werden, in Ruhe sind. Dann ist die Masse der Teilchen gleich P_0 (Energie)

$$\begin{aligned} M &= P_0 \\ &= P_0' + m_0 Q' \end{aligned} \quad (5.12)$$

wobei P_0' alle Glieder im Ausdruck für Energie (4.36) sind, die die Masse m_0 nicht enthalten. Die Gleichung (5.12) muß nun renormiert werden, um die physikalische Masse des Elektrons zu erhalten:

$$\begin{aligned} m &= \frac{M}{A} \\ &= \frac{1}{A} P_0' + m_0 \frac{Q' - Z}{z - Z} \end{aligned} \quad (5.13)$$

woraus sich ergibt

$$m_0 = \frac{z - Z}{Q' - Z} \left(m - \frac{1}{A} P_0' \right) \quad (5.14)$$

Dadurch ist die Massenrenormierung durchgeführt, denn die rechte Seite von (5.14) enthält die mechanische Masse m_0 nicht mehr.

Diese nichtgenauen Überlegungen sagen allerdings nichts darüber aus, ob dadurch alle Divergenzen beseitigt werden.

Ich bin Herrn Prof. Dr. W. Greiner zu großem Dank verpflichtet, daß er mir das Thema vorgeschlagen hat und daß er sich mit dem Manuskript große Mühe gegeben hat, all die Fehler zu verbessern, die durch meine mangelhafte Kenntnis der deutschen Sprache entstanden sind. Ich bin auch meinem Bruder Peter und seiner Frau Christiane sehr dankbar, daß sie die Arbeit so sorgfältig mit der Schreibmaschine geschrieben haben.

Referenzen

- 1) P.-G. Reinhard: Dissertation, Frankfurt/Main 1970
- 2) J. D. Bjorken, S. D. Drell: Relativistische Quantenfeldtheorie,
Bibliographisches Institut, Mannheim 1967

Lebenslauf

Am 2. 9. 1945 wurde ich in Prag, CSSR, geboren als Sohn des Dr. jur. Alexander Kelemen und seiner Ehefrau Vera Kelemen, geborene Horka. Ab Herbst 1951 besuchte ich die Volksschule in Prag und anschließend ab 1959 die Oberschule, die ich im Mai 1963 mit dem Abitur abschloß. Im Wintersemester 1963 begann ich an der Karls-Universität ebenfalls in Prag das Studium der Physik, das ich im Oktober 1968 unter der Leitung von Dr. Höschel mit dem Diplom beendete. Bis zum 28. 4. 1969 war ich auch dort als Assistent angestellt; an diesem Tag habe ich mit meiner Mutter und meinen drei Brüdern die CSSR verlassen. Seit Oktober 1969 bin ich am Institut für Theoretische Physik in Frankfurt als wissenschaftliche Hilfskraft tätig, und zwar unter Leitung von Prof. Dr. Walter Greiner.

